TD probabilités. 13/10/98

Exercice 1

Soit $f_\Theta(\theta)$ la densité de probabilité de θ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Cette loi est uniforme, donc elle s'écrit:

$$f_\Theta(\theta) = f_0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_0 d\theta = 1 \Leftrightarrow f_0(\pi/2 + \pi/2) = 1 \Leftrightarrow f_0 = \frac{1}{\pi}$$

On définit $Y = \tan(\Theta)$, *ie* $y = \phi(\theta) = \tan(\theta)$

$$\begin{aligned} \phi :]-\pi/2, \pi/2[\quad &\to \quad]-\infty, \infty[\\ \theta \quad &\to \quad \tan(\theta) \end{aligned}$$

ϕ^{-1} est bijective et monotone sur le domaine considéré, donc on peut écrire:
$f_Y(y) = f_\Theta(\theta = \phi^{-1}(y)) \left.\frac{1}{|\phi'(\theta=\phi^{-1}(y))|}\right|_{\theta=\phi^{-1}(y)}$
$|\phi'(\theta)| = 1/(\cos^2(\theta)) = 1 + \tan^2(\theta) = 1 + y^2$

On a donc: $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

Rem: c'est une loi de Student à un degré de liberté

Exercice 2

1.La densité de probabilité de la variable aléatoire V_x s'écrit:
$f_{V_x}(v_x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-{v_x}^2/2}$.
On pose: $Y = {V_x}^2$

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P({V_x}^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} < V_x \leq \sqrt{y}) \\ &= F_{V_x}(\sqrt{y}) - F_{V_x}(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

En dérivant l'expression, on obtient donc:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}(F_{V_x}(\sqrt{y}) - F_{V_x}(-\sqrt{y})) \\ &= \left.\frac{F_{v_x}}{d(\sqrt{y})}\right|_{v_x=\sqrt{y}} \times \frac{d(\sqrt{y})}{dy} - \left.\frac{F_{v_x}}{d(\sqrt{y})}\right|_{v_x=-\sqrt{y}} \times \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} \\ &= f_{V_x}(v_x = \sqrt{y}) \times (-\frac{1}{2}y^{-1/2}) + f_{V_x}(v_x = -\sqrt{y}) \times (\frac{1}{2}y^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-1/2} \end{aligned}$$

C'est une loi du χ^2 à un degré de liberté.
La fonction génératrice de la loi de Y s'écrit:

$$
\begin{aligned}
g_Y(t) &= \mathcal{E}(e^{itY}) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{ity} f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv_x{}^2} f_{V_x}(v_x) dv_x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_x{}^2(1/2-it)} dv_x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u^2} (1/2-it)^{-1/2} du \text{ (en posant } u = v_x(1/2-it)^{-1/2}) \\
&= (1-2it)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

On reconnait bien la fonction génératrice d'une loi du χ^2 à un degré de liberté.
Remarque: La fonction génératrice d'une loi, si elle existe, est unique. Ainsi, deux lois ayant même fonction génératrice sont identiques. On aurait donc pu se dispenser de calculer explicitement l'expression de la loi de Y: le seul calcul de sa fonction génératrice nous permet de montrer que Y suit une loi du χ^2 *à un degré de liberté.*

2.

$$
\begin{aligned}
g_Z(t) &= \mathcal{E}(e^{it(V_x{}^2+V_y{}^2+V_z{}^2)}) \\
&= \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} f_Z(z) dz \\
&= \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{it(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)} f_{V_xV_yV_z}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\
&= \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{it(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)} f_{V_x}(v_x) f_{V_y}(v_y) f_{V_z}(v_z) dv_x dv_y dv_z \\
&\quad \text{(car les variables aléatoires sont indépendantes)} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv_x{}^2} f_{V_x}(v_x) dv_x\right)^3 \text{(car les 3 variables ont la même loi de proba)} \\
&= (1-2it)^{-3/2}
\end{aligned}
$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi du χ^2 à trois degré de liberté.

Vitesse quadratique moyenne:
Soit μ_Z la moyenne de Z. La vitesse quadratique moyenne $(\overline{Z^2})$ correspond à la racine carrée de μ_Z.
D'après le cours, $\mathcal{E}(z^k) = \frac{g_Z^{(k)}(0)}{i^k}$.
Or, $\mu_Z = \mathcal{E}(z)$.
On trouve $\overline{Z^2} = \sqrt{3}$.

3. On effectue le changement de variable aléatoire:
$V = \sqrt{Z}$
ie $v = \phi(z) = \sqrt{z}$.
ϕ^{-1} est bijective et monotone de $[0, +\infty] \to [0, +\infty]$ donc il n'y a pas de difficulté.
$f_V(v) = f_Z(z = \phi^{-1}(v)) \frac{1}{|\phi'(z=\phi^{-1}(v))|}\Big|_{z=\phi^{-1}(v)}$
$\phi'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2} = (2v)^{-1}$
$f_Z(z) = (\frac{z}{2\pi})^{1/2}e^{-z/2}$ (loi du χ^2 à 3 deg de lib)
D'où$f_V(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}v^2e^{-v^2/2}$

Vitesse la plus probable:

On cherche le maximum de la densité de probabilité de V.
$f'_V(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}ve^{-v^2/2}(2 - v^2)$
$f'_V(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 ou v = \sqrt{2}$ (la solution $v = -\sqrt{2}$ est impossible car v est positive ou nulle). Le maximum est atteint en $v = \sqrt{2}$.

La vitesse la plus probable vaut donc $\sqrt{2}$.

Moyenne de la norme de la vitesse:

$$\begin{aligned}
\mu_V &= \mathcal{E}(V) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-v^2/2} dv \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[-v^2 e^{-v^2/2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2ve^{-v^2/2} dv \right) \\
&= \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

On remarque la norme la plus probable, la norme moyenne, et la vitesse quadratique moyenne sont DIFFERENTES!!