Probabilités L3
Corrigé de l'examen de septembre 1998

Magistère des sciences de la Terre, première année, ENS Lyon.

I.

a.) 8 étudiants ont eu entre entre 80 et 89 en mathématiques et entre 70 et 79 en physique ; si les cent étudiant sont représentatifs de l'ensemble des étudiants (ce que l'on suppose dans l'exercice) la probabilité pour un étudiant pris au hasard d'avoir entre entre 80 et 89 en mathématiques et entre 70 et 79 en physique est $p = 8/100 = 8\%$.

b.) Il faut commencer par sommer les lignes et les colonnes pour arriver aux probabilités marginales, c'est-à-dire aux probabilités sur les notes de maths et de physique :

Notes de Mathématiques $\rightarrow$ Notes de Physique $\downarrow$	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	Total Physique $\downarrow$
90-99				2	4	4	10
80-89			1	4	6	5	16
70-79			5	10	8	1	24
60-69	1	4	9	5	2		21
50-59	3	6	6	2			17
40-49	3	5	4				12
Total Mathématiques $\rightarrow$	7	15	25	23	20	10	100

Le nombre d'étudiants ayant eu moins de 70 en maths est donc de 7+15+25=47. La probabilité qu'il ait une note de mathématiques inférieure à 70 est donc $p = 47\%$.

c.) Il faut sommer les deux premières lignes de la troisième colonne : $p = (1 + 5)/100 = 6\%$.

d.) Il est plus rapide de compter le nombre d'étudiants qui n'ont été reçus dans aucune matière. Il s'agit des étudiants ayant eu moins de 60 dans les 2 matières. Il faut donc sommer les 4 cases situées en bas à gauche : $n = 3 + 6 + 3 + 5 = 17$ donc $p = 1 - 17/100 = 83\%$.

e.) - Note de physique la plus probable : elle est donnée par le plus grand nombre de la dernière colonne du tableau (la somme sur les colonnes) ; il s'agit de la note 70-79.

- Note de mathématiques la plus probable : idem sur les lignes ; 60-69.

- Couple de notes maths-physique le plus probable ; la plus grande valeur du tableau est 10 et correspond au couple 70-79 en maths et 70-79 en physique.

f.) Sachant qu'il a entre 60 et 69 en mathématiques, sa note de physique la plus probable est donnée par le + grand nombre de la colonne 60-69, c'est-à-dire 9. La note cherchée est 60-69.

g.) a) Soit M et P les variables aléatoires « note de maths » et « note de physique ». Le tableau représente une estimation de la loi de *probabilité conjointe* (en pourcentage) $f_{M,P}(m, p)$.

b) La dernière ligne (somme sur les lignes) est une estimation de la *loi marginale* de M :

$$f_M(m) = \int_0^{100} f_{M,P}(m, p)\ \mathrm{d}p$$

Cette intégrale est une somme discrète dans le cas qui nous occupe. La probabilité cherchée est directement la valeur de la fonction de répartition de m :

$$P(M < 70) = F_M(69) = \int_0^{69} f_M(m)\ \mathrm{d}m$$

c) Il s'agit de l'intégrale *de la loi conjointe* :

$$P(M < 70, P \geq 70) = \int_0^{69}\int_{70}^{100} f_{M,P}(m,p)\ \mathrm{d}p\ \mathrm{d}m$$

d) On peut le voir soit comme *la fonction de répartition de la loi conjointe* :

$$P(M \geq 60 \textit{ ou } P \geq 60) = 1 - P(M < 60, P < 60)1 - \int_0^{59}\int_0^{59} f_{M,P}(m,p)\ \mathrm{d}p\ \mathrm{d}m$$

ou comme la somme des *probabilités marginales* :

$$P(M \geq 60 \textit{ ou } P \geq 60) = P(M \geq 60) + P(P \geq 60) = 1 - F_M(59) + 1 - F_P(59).$$

e) On a cherché ici les *maximums (de probabilité) des lois marginales et conjointe* (ce ne sont pas les mêmes !).

f) Il s'agissait dans cette question de déterminer une *probabilité conditionnelle.*

II. Somme de deux variables gaussiennes

a.) Il suffit d'appliquer la formule du changement de variable

$$f_{Z,Y}(z,y') = f_{X,Y}(x(z,y'),y(z,y'))J = f_{X,Y}(x(z,y'),y(z,y'))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y')}\right|$$

Or le jacobien vaut $J = 2$ d'où le résultat.

b.) Par définition de la densité marginale :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,Y}(z,y)\ \mathrm{d}y = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(2z-y,y)\ \mathrm{d}y.$$

d'où le résultat puisque X et Y sont supposés indépendants.

c.) Il suffit de remplacer par :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{et} \quad f_X(2z-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(2z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On arrive facilement à :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(y-z)^2}{\sigma^2}\right)\ \mathrm{d}y.$$

L'intégrale est celle d'une gaussienne d'écart type $\sigma/\sqrt{2}$ et vaut donc $\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{2} = \sqrt{\pi}\sigma$. D'où le résultat :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}\right).$$

La loi de la moyenne des deux v.a. de même loi gaussienne est donc une gaussienne de même moyenne et d'écart type l'écart type des v.a. divisé par $\sqrt{2}$.

——— Fin ———

Texte d'examen et corrigé disponibles à `http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`