

UE inversion
Contrôle-continu de février 2008
Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.
Documents autorisés : cours. Durée : 3 h.

— o —

On a mesuré des couples (x_i, y_i) donnés dans le tableau suivant. Les x_i sont supposés parfaitement connus. Les y_i sont supposés non corrélés et leurs incertitudes sont données en 4e colonne du tableau. La 3e colonne est inutile dans ce TP. La théorie enseigne que ces quantités sont reliées par $y = ax + b$. On va chercher l'information sur le couple (a, b) connaissant ces observations. On supposera que la loi a priori sur (a, b) est uniforme ($\Rightarrow C_m^{-1} = 0$).

x_i	y_i		sigma_y_i
1	10	.5	.5
3	11	.5	.5
5	11	.5	.5
7	12	.5	.5
10	13	.5	.5
12	14	.5	.5
13	14	.5	.5
15	15	.5	.5
16	15	.5	.5
18	16	.5	.5
%20	14	.5	.5 % Point excentré non considéré dans ce TP.
%31	2	.5	.5 % Point tres excentré

1. En supposant que la loi sur les données est gaussienne, de quelle forme est la loi *a posteriori* sur (a, b) ? Calculer numériquement le couple (a, b) qui maximise cette loi *sans* le point très excentré puis *avec*. Représenter les 11 points de mesure et ces deux droites.

2. En supposant que la loi *a priori* sur les données est gaussienne :

- i. avec la fonction `IMAGESC` de matlab tracer la loi *a posteriori* sur (a, b) sans tenir compte du point très excentré. On conseille de considérer l'intervalle $b \in [9; 15]$, $a \in [-0, 2; 0, 4]$.
- ii. même question sur une deuxième figure en tenant compte du point très excentré.

3. On suppose cette fois que la loi *a priori* sur les données est exponentielle :

$$f_D(d) = \exp\left(-\sum_i \frac{|d_i - d_i^{\text{obs}}|}{\sigma_{y_i}}\right). \quad (1)$$

iii. sur une troisième figure tracer la loi *a posteriori* sur (a, b) sans tenir compte du point très excentré.

iv. même question sur une quatrième figure en tenant compte du point très excentré.

4. A votre avis pourquoi parle-t-on en général : de *moindres carrés* et de *norme L_2* dans les cas i-ii, et de *norme L_1* dans les cas iii-iv ?

5. A l'aide de ces figures, déterminer graphiquement, pour chacun des quatre cas i-iv, le « meilleur » couple (a, b) . On donnera les nombres avec une précision de deux chiffres significatifs.

6. Représenter sur une nouvelle figure les points de mesures et les quatre droites correspondant aux cas i-iv.

7. Bilan, commentaire, conclusion, synthèse, prospective, remarques.