Calcul formel : Maple

Yanick Ricard - Frédéric Chambat

L'objectif de ce TP est de s'initier rapidement au calcul formel, ou calcul symbolique, avec Maple.

1 Introduction

Un certain nombre de logiciels symboliques (Maxima (logiciel libre), Maple, Mathematica...) permettent de faire des calculs symboliques. Leurs fonctionnements sont proches. Ici nous utilisons Maple.

Quelques instructions simples :

`>restart` remet les mémoires à zéro
`:=` définit quelque chose. Par exemple `>f:=x`^{2}`-x` définit f
`>f` écrit la définition de f
`>simplify(X)` simplifie X si c'est possible
`>factor(X)` simplifie le polynôme X si c'est possible (le programme est rusé, mais il n'y a pas de solutions systématiques pour les degrés supérieurs à 3)
`>plot(f,x=0..1)` dessine f pour x de 0 à 1
`>solve(f=a,x)` résout l'équation $f = a$ pour x
`>solve({f=1,g=2},{x,y})` résout un système d'équations à deux variables
`>diff(f,x)` calcule la dérivée de f
`>int(f,x)` calcule une primitive de f
`>int(f,x=0..1)` calcule une intégrale de f
`>E:=a diff(g(x),x$2)+b diff(g(x),x)+c` définit l'équation différentielle $ag'' + bg' + c$
`>dsolve(E,f(x))` résout l'équation différentielle en f
`>dsolve({E,g(0)=0,D(g)(0)=0},g(x))` résout l'équation différentielle avec les conditions aux limites $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$
`>solution:=dsolve(E,f(x)); s:=subs(solution,f(x))` pour récupérer la solution `f` dans une expression `s`, par exemple pour la tracer etc.
`>subs(x=1/2,f)` donne la valeur de f en $x = 1/2$.
Remarquer la différence avec `subs(x=1/2.,f)`.
Essayer aussi `g:=subs(x=1/2,f);evalf(g)`
`>assume(n>0)` ou `assume(n,integer)` peut être utile. Regarder la différence entre `>f:=cos(n*Pi)` et `>assume(n,integer);f:=cos(n*Pi)`
`>series(g,x=0,5)` donne le développement en série de g jusqu'en x^4, autour de $x = 0$.

La touche `Rechercher` permet de trouver les syntaxes adéquates. Parfois il convient de « charger » d'autres paquets d'opérateurs. Par exemple si vous chercher `plot logarithm`, vous trouver les fonctions `logplot, semilogplot, loglogplot` et d'autres... que l'on charge avec `>with(plots)`, par exemple essayer :

```
>with(plots)
>f:=exp(2*x-10)
>plot(f,x=0..100)
```

```
>logplot(f,x=0..100)
```

2 Calculs symboliques

Afficher le résultat de $2ab - 3ba/2 - (a-b)^3$, de $\cos^2(x) + \sin^2(x)$, de $\ln(e^x)$ et de $e^{\ln x}$. Il faut parfois aussi appliquer l'instruction `simplify` à ces expressions, ou parfois `(assume (x, real))` avant de simplifier.

3 Tracé de fonctions et dérivation

Tracer la fonction suivante puis calculer sa dérivée :

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

4 Intégration

1. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1 + x^3} \mathrm{d}x$$

et les primitives

$$\int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \quad \int \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x \quad \int e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

2. Soit la densité dans une planète $\rho(x) = 10^4\,(1 - 2x^2/3)$ pour le rayon normalisé $x \in [0, 1]$. Calculer la gravité ($G = 6,674.10^{-11}$ m^3 s^{-2} kg^{-1}, $R = 6371.10^3$ m) :

$$g(x) = \frac{4\pi G R}{x^2} \int_0^x \rho(y) y^2 \mathrm{d}y$$

et la pression interne

$$p(x) = R \int_x^1 \rho(y) g(y) \mathrm{d}y.$$

Tracer ces trois fonctions.

5 Limites et développements limités

Soit la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Calculer la limite en 0. Donner son développement limité en 0 à l'ordre 10.

6 Résolution d'équation

1. Déterminer les zéros du polynôme $x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 11x - 4$ et de $x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 11x - 4$. Essayer avec `factor` puis avec `solve`.

2. La désintégration radioactive des deux isotopes de l'uranium, ^{235}U et ^{238}U, produit les isotopes ^{207}Pb et ^{206}Pb. Les valeurs des constantes de désintégration de l'uranium 235 et 238 utilisées par Patterson (1956) sont : $\lambda_{235} = 0.972$ Ga^{-1} et $\lambda_{238} = 0.1537$ Ga^{-1}. Les mesures de Patterson sur des météorites et les équations de désintégration radioactive permettent de montrer que (voir TD à suivre en python)

$$\frac{e^{\lambda_{235}t} - 1}{e^{\lambda_{238}t} - 1} \approx 83.05. \tag{1}$$

Déterminer l'âge de la Terre par une recherche de zéro.

Avec `solve`, il est possible qu'il y ait beaucoup de solutions complexes : pour que ça fonctionne il faudra peut-être se limiter (pour une raison inconnue de nous) à l'approximation $\lambda_{235} \approx 0.97$ Ga^{-1} et $\lambda_{238} \approx 0.15$ Ga^{-1}, et bien sûr à la solution réelle (qui normalement sort en premier).

3. Résoudre le système $x + 2y + z = 1, 2x + y + z = 0, 2, x + y + 2z = 1$, puis le système $x + 2y + z = 1, 2x + y + z = 0, 2, x - y = 1$. Que se passe-t-il ?

7 Equations différentielles

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

avec $x(0) = 1, x'(0) = 0$. Dessiner la fonction pour $\lambda = 0.1$, $\omega = 1$, puis pour $\lambda = 2$, $\omega = 1$ (une fois résolue l'équation, il vous faudra récupérer la solution dans une fonction pour l'afficher, cf. l'introduction).

8 Série de Fourier

Toute fonction périodique de période T peut s'écrire comme somme de fonctions trigonométriques

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right) \tag{2}$$

où

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Définisser sur $[-T/2, T/2]$ une fonction périodique de période T, par exemple $f(x) = 0$ sur $[-1, 0]$, $f(x) = 1$ sur $[0, 1]$. On pourra utiliser les fonctions `Heaviside` ou `peacewise` ou autre. Représenter cette fonction.

Calculer avec Maple a_0, a_n, b_n (une méthode simple est d'abord d'écrire explicitement les intégrales en remplaçant f par 0 ou 1). Représenter la série de Fourier de f, pour $n = 0, 1, 2, ...15$ (une méthode simple est de taper à la main la somme plutôt qu'écrire une boucle).

Refaire le calcul pour une fonction triangle : $f(x) = 1 - \mathrm{abs}(x)$ sur $[-1, 1]$.