Géophysique
Exercices de Gravimétrie

L3 Sc. de la Terre, ENS Lyon

—

On prendra $G = 6,673.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} pour valeur de la constante de gravitation, $R_0 = 6371$ km pour le rayon de la Terre et $g_0 = 9,81$ ms^{-2} pour la pesanteur de la Terre moyenne.

I. Effets de l'altitude et de la topographie

On considère un plateau horizontal d'altitude h, de densité uniforme ρ, et une falaise verticale (voir figure). Calculer par rapport à une station de référence ($\Delta g_0 = 0$) située en plaine, loin de la falaise, les variations de gravité :

- Δg_1 sur la plaine, loin de la falaise, au sommet d'une tour légère de hauteur h.
- Δg_2 sur le plateau, loin de la falaise.
- Δg_3 sur le plateau, loin de la falaise, mais au fond d'un puits de profondeur h.
- Δg_4 au pied de la falaise (calculer pour cela l'anomalie créée par un demi-plateau).
- Δg_5 au sommet de la falaise.

A.N. : $h = 40$ m, $\rho = 2,7$.

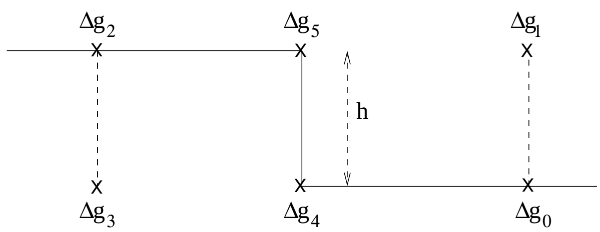

FIG. 1 –

II. Campagne de mesures

Calculer l'anomalie gravimétrique $\Delta g(x)$ produite à la surface du sol par une sphère de rayon R, dont le centre est situé à une profondeur h, et de densité $\rho_c + \Delta\rho$ où ρ_c est la densité de la croute encaissante. L'axe des x est pris parallèle au sol et l'origine est à la verticale du centre de la sphère.

Au cours d'un campagne gravimétrique, on a observé, toutes corrections faites (latitude, altitude et topographie), les anomalies suivantes :

X (m)	Y (m)	g (mGal)	X (m)	Y (m)	g (mGal)
100	300	0,40	500	500	1,04
200	300	0,63	600	200	1,34
300	200	0,95	600	300	1,53
300	300	1,04	600	400	1,36
300	400	0,95	700	200	0,94
400	200	1,35	700	300	1,03
400	300	1,52	700	400	0,95
400	400	1,35	800	300	0,63
500	100	1,03	900	300	0,40
500	200	1,53	1000	300	0,27
500	300	1,80	1100	300	0,18
500	400	1,53			

La densité des terrains encaissants étant de 2,75, peut-on : localiser la masse anormale, déterminer sa forme, son volume, sa masse, sa densité, sa profondeur ?

III. Anomalie d'un plateau cylindrique ; plateau tibetain

1. Soit $\vec{g}$ la gravité au dessus et au milieu d'un plateau cylindrique (point M sur la figure 2-gauche). Pourquoi $\vec{g}$ est-il dirigé suivant l'axe des z ? On notera $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Exprimer r' et $\cos\lambda$ en fonction des autres quantités.

2. Rappeler quelle est l'expression générale de la gravité $\vec{g}$ d'un corps occupant un volume V en fonction de sa densité. En déduire, avec les notations de la figure, l'expression de la gravité du cylindre en fonction de sa densité ρ supposée constante.

3. En déduire que :

$$g = G\rho \int_V \frac{b+h-z}{\left(r^2+(b+h-z)^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

En coordonnées cylindriques cela s'écrit :

$$g = G\rho \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{b+h-z}{\left(r^2+(b+h-z)^2\right)^{3/2}} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r \tag{2}$$

4. En intégrant successivement les trois intégrales montrer que :

$$g = 2\pi G\rho\left(h + \sqrt{R^2+b^2} - \sqrt{R^2+(b+h)^2}\right). \tag{3}$$

5. Le plateau tibétain (largeur 2000 km, hauteur 5 km) est assimilé à un tel plateau cylindrique. En prenant $\rho = 2,7$ calculer l'anomalie qu'il crée à sa surface ($b = 0$) en mGal (qu'aurait-on trouvé avec un plateau infini ?).

6. On mesure $\Delta g = -1515$ mGal à 5000 m d'altitude. Quelle est l'anomalie à l'air libre correspondante ? Comparez à la valeur trouvée à la question précédente ; qu'en concluez-vous ?

7. On considère maintenant une racine crustale de même forme cylindrique et de topographie h' (figure 2-droite). Calculer l'anomalie totale créée par le plateau tibétain et la racine. En prenant $\rho_m = 3,2$ pour la densité du manteau calculer cette anomalie en mGal pour les valeurs suivantes de h' : 10, 20, 30, 40 km. À l'aide de l'anomalie à l'air libre observée en déduire une estimation de l'épaisseur crustale à cet endroit. On prendra $E = 35$ km.

8. Que vaut cette épaisseur si on suppose l'isostasie « parfaite », c'est-à-dire que le « poids des colonnes de matière » est égal. Qu'en concluez-vous ?

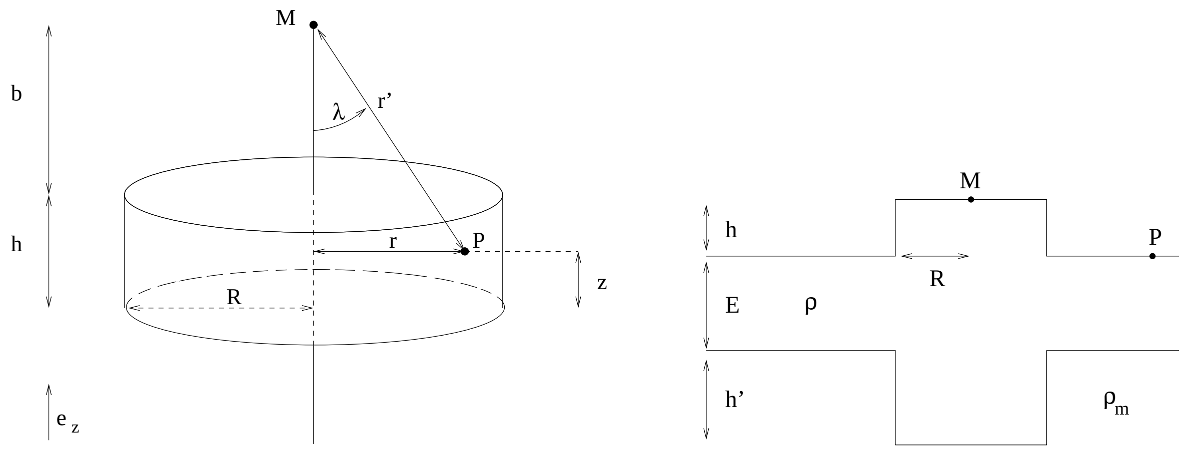

FIG. 2 –

IV. Isostasie

Rappeler la relation entre topographie et épaisseur de racine dans la cas de l'équilibre isostatique.

Il y a 250 Ma la chaîne hercynienne était comparable à l'Himalaya ($h = 8000$ m). En supposant que la croûte est en équilibre isotatique, à l'actuel comme à l'hercynien, que pouvez-vous dire sur les roches que l'on trouve actuellement dans le Massif Central à une altitude de 1000 m ?

Soit un bassin de 1000 m de profondeur, avec un taux de sédimentation constant de 0.5 mm/an, combien de temps faut-il pour combler ce bassin ?

V. Rebond post glaciaire

Sachant que l'anomalie actuelle sur l'Est Canadien est d'environ −50 mGal, de combien de mètres la surface peut-elle encore remonter ?

VI. Observations du pendule

En utilisant l'observation faite en 1672 par Richer (cf. extrait ci-dessous) déterminer la valeur de la pesanteur en m/s^2 à Paris et Cayenne. La différence peut-elle être attribuée à la force centrifuge ? On donne : 1 pied = 12 pouces (32,483 cm) ; 1 pouce = 12 lignes (2,707 cm) ; 1 ligne = 12 points (0,226 cm). Sachant que la pesanteur varie au premier ordre comme $\gamma(\varphi) = \gamma_e(1+\hat{\alpha}\sin^2\varphi)$, déterminer numériquement $\hat{\alpha}$ ainsi que la pesanteur aux pôles et à l'équateur. En déduire l'aplatissement α de la Terre ; on donne la formule de Clairaut :

$$\alpha + \hat{\alpha} = \frac{5}{2}\frac{\Omega^2 a}{\gamma_e} \tag{4}$$

où Ω et a sont la vitesse angulaire de rotation et le rayon équatorial de la Terre.

320 OBSERVATIONS ASTRONOM. ET PHYS.

CHAPITRE X.

OBSERVATIONS PHYSIQUES.

ARTICLE I.

De la longueur du Pendule à secondes de temps.

L'UNE des plus considérables Observations que j'ai faites, est celle de la longueur du Pendule à secondes de temps, laquelle s'est trouvée plus courte en Caïenne qu'à Paris : car la même mesure qui avoit été marquée en ce lieu-là sur une verge de fer, suivant la longueur qui s'étoit trouvée nécessaire pour faire un Pendule à secondes de temps, ayant été apportée en France, & comparée avec celle de Paris, leur difference a été trouvée d'une ligne & un quart, dont celle de Caïenne est moindre que celle de Paris, laquelle est de 3. pieds 8. lignes$\frac{3}{5}$. Cette Observation a été réïterée pendant dix mois entiers, où il ne s'est point passé de semaine qu'elle n'ait été faite plusieurs fois avec beaucoup de soin. Les vibrations du Pendule simple dont on se servoit, étoient fort petites, & duroient, fort sensibles jusques à cinquante-deux minutes de temps, & ont été comparées à celles d'une Horloge très-excellente, dont les vibrations marquoient les secondes de temps.

Fig. 3 – *Extrait des* Observations astronomiques et physiques faites en l'isle de Caïenne, *Richer, 1679.*