

Magnétisme et pesanteur - Examen 2023

M1 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Durée 1 h 30 min.

— o —

Le sujet est long, le barème sera supérieur à 20.

1 Isostasie du Tibet, hypothèse du plateau cylindrique

Le plateau du Tibet est assimilé à un plateau

- de hauteur $h = 5$ km,
- de densité $\rho_c = 2,7$,
- au dessus d'un manteau de densité $\rho_m = 3,2$.

Rappel : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

Les questions sont en grande partie indépendantes.

1. En supposant l'isostasie réalisée, calculer l'épaisseur de croûte au niveau du plateau tibétain. On supposera que l'épaisseur de croûte est $E = 35$ km dans les régions continentales d'altitude nulle.

2. Soit $\vec{g}$ la gravité au dessus et au milieu d'un plateau cylindrique (point O sur la figure 1-gauche). Pourquoi $\vec{g}$ est-il dirigé suivant l'axe des z ? On notera $\vec{g} = g\vec{e}_z$. Exprimer r' et $\cos \lambda$ en fonction de r , b et z .

3. Rappeler quelle est l'expression générale de la gravité $\vec{g}$ d'un corps occupant un volume V en fonction de sa densité. En déduire, en fonction de $\vec{r}'$, l'expression de la gravité du cylindre en O en fonction de sa densité ρ supposée constante.

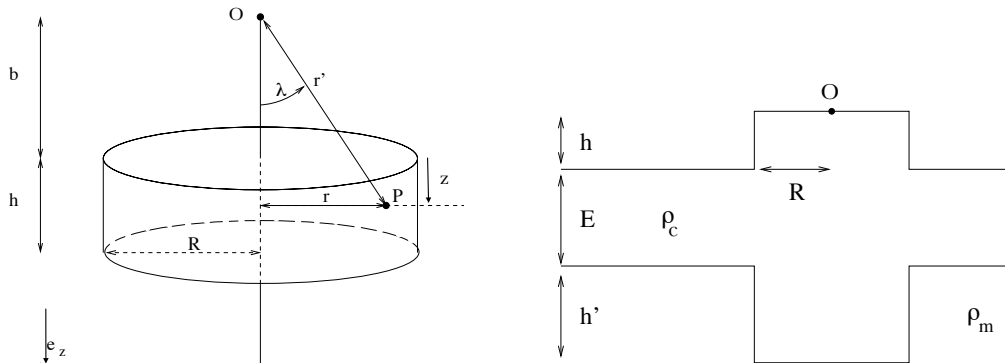


FIGURE 1 – Gauche : Cylindre. Droite : topographie et sa racine crustale

4. En déduire que :

$$g = \vec{g} \cdot \vec{e}_z = G\rho \int_V \frac{b+z}{(r^2 + (b+z)^2)^{3/2}} dV \quad (1)$$

En coordonnées cylindriques cela s'écrit :

$$g = G\rho \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{b+z}{(r^2 + (b+z)^2)^{3/2}} r d\theta dz dr \quad (2)$$

5. En intégrant successivement les trois intégrales, montrer que :

$$g = 2\pi G\rho \left(h + \sqrt{R^2 + b^2} - \sqrt{R^2 + (b+h)^2} \right). \quad (3)$$

6. Le Tibet est considéré comme un plateau cylindrique de rayon $R = 800$ km. Calculer l'attraction, en mGal, du plateau Tibetain à la surface. Comparer à l'attraction d'un plateau infini.

7. La racine est aussi considérée comme un plateau cylindrique de même rayon. Calculer son déficit d'attraction à la surface. Comparer au déficit d'attraction d'un plateau infini.

8. Donner la somme des attractions du plateau et de la racine. Comparer aux valeurs mesurées vers le centre de ce plateau et avec le Moho sismique (fig 2). Conclusion.

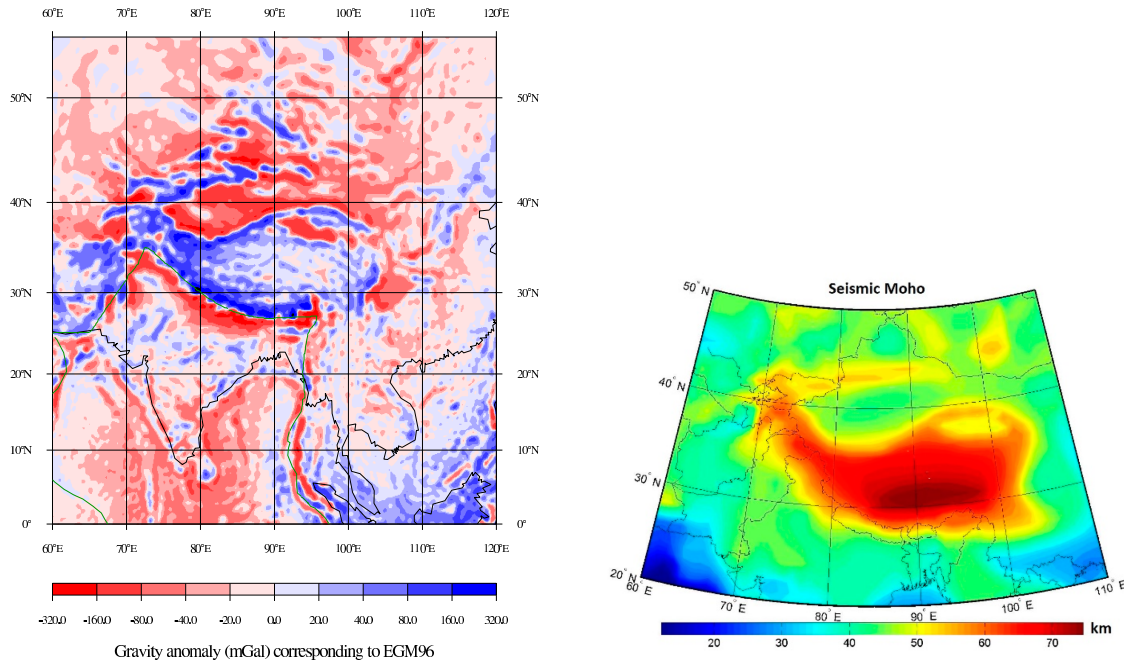


FIGURE 2 – *Gauche : Anomalies de pesanteur à l'air libre (Chambat, 1997). Droite : Profondeur du Moho sous le Tibet vue par les méthodes sismiques (Baranov, 2018, <https://doi.org/10.3390/geosciences8120461>)*

2 Champ de gravité

A l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ de gravité à l'extérieur d'une planète à symétrie sphérique de masse M .

3 Paléomagnétisme

Des mesures d'aimantation ont été faites sur des roches en place trouvées à 20°N, 30°E. L'inclinaison trouvée est de $0 \pm 2^\circ$, la déclinaison de 40° . Que pouvez-vous en déduire sur cette roche ?

4 Sonde spatiale

Pages suivantes.

— o —

Géomagnétisme

Une sonde spatiale effectue un passage à proximité d'une planète inconnue et mesure les trois composantes du champ magnétique (Fig. 1). Notre objectif est de déterminer la direction de l'axe de rotation de la planète. La sonde voyage en ligne droite, à grande vitesse (environ 15 km s^{-1}), et passe à une distance minimale $d = 12000 \text{ km}$ de la planète. On note P la position de la planète (son centre de masse) et O la position de la sonde lorsqu'elle est au plus près. On note x la coordonnée dans la direction de la trajectoire (origine en O), y dans la direction OP et z la coordonnée qui complète le repère orthonormé.

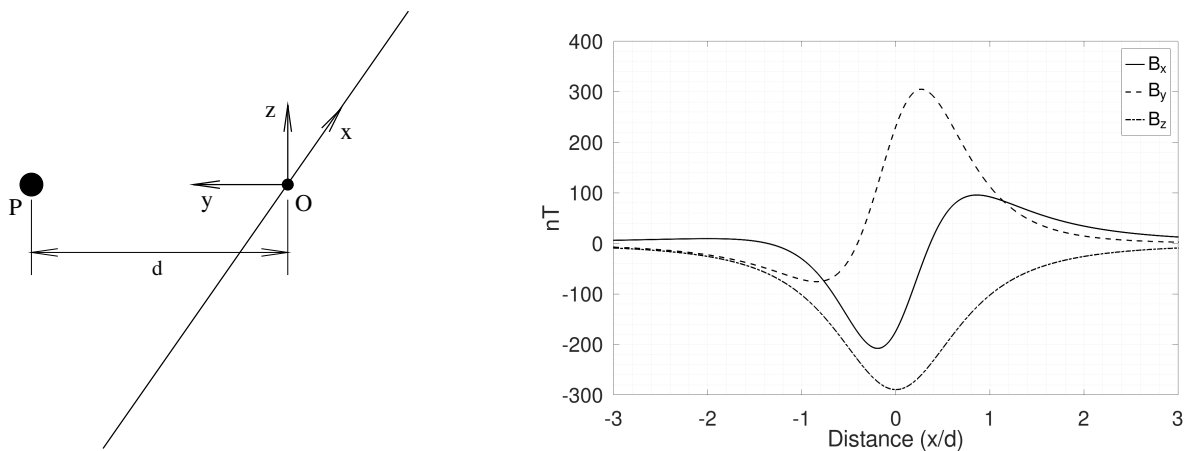


Figure 1: Trajectoire de la sonde et profil magnétique.

- 1) En regardant l'allure générale des profils de champ magnétique, qu'est-ce qui vous conduit à privilégier l'hypothèse d'un champ magnétique dynamo par rapport à l'hypothèse d'un champ crustal ?
- 2) Quelle est la structure du champ magnétique que vous attendez, et quelle est sa relation probable avec l'axe de rotation de la planète ?
- 3) En supposant tour-à-tour que le moment magnétique de la planète est orienté purement selon l'axe x , puis selon l'axe y , puis selon l'axe z , tracez la forme approximative des profils B_x , B_y et B_z attendus le long de la trajectoire de la sonde, dans les trois cas.
- 4) Dans les mêmes conditions que la question précédente, déterminer exactement la valeur des trois composantes B_x , B_y et B_z , au point O . Dans chaque cas, on supposera que le moment magnétique est d'amplitude unité (1 Am^2) ou arbitraire.
- 5) Par le principe de superposition, en lisant les trois composantes du champ magnétique mesuré en O (Fig. 1), déterminer les trois composantes du moment magnétique selon x , y et z .
- 6) En déduire l'angle entre la direction de l'axe de rotation de la planète et de la trajectoire de la sonde ainsi que l'angle de l'axe de rotation avec la direction OP .

Rappel : le dipôle magnétique de moment $\mathbf{M}$ a pour champ magnétique

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \|\mathbf{M}\|}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta] ,$$

en coordonnées sphériques où l'axe de rotation est aligné avec $\mathbf{M}$. Le champ magnétique peut aussi être écrit de façon intrinsèque (indépendante d'un système de coordonnées)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{M}] .$$

Magnetism et gravity - Exam 2023

M1 Earth sciences, ENS Lyon.

Duration 1 h 30 min.

— o —

The subject is long, the scale will be higher than 20.

1 Isostasy of Tibet, cylindrical plate hypothesis

The Tibetan plateau is supposed to be a plate with

- a height $h = 5$ km
- a density $\rho_c = 2700$ kg/m³
- above a mantle of density $\rho_m = 3200$ kg/m³.

Reminder : $G = 6.67 \times 10^{-11}$ kg⁻¹m³s⁻².

The questions are largely independent.

1. Supposing that isostasy is achieved, calculate the thickness of the crust at the level of the Tibetan plateau. We assume that the crustal thickness is $E = 35$ km in continental regions of zero altitude.

2. Let $\vec{g}$ be the gravity above and in the middle of a cylindrical plate (point O in figure 1-left). Why is $\vec{g}$ directed along the z axis? We will note $\vec{g} = g\vec{e}_z$. Express r' and $\cos \lambda$ as functions of r , b and z .

3. Recall the general expression for gravity of a body occupying a volume V as a function of its density. Deduce, as a function of r' , the expression for the gravity of the cylinder at O as a function of its density assumed constant.

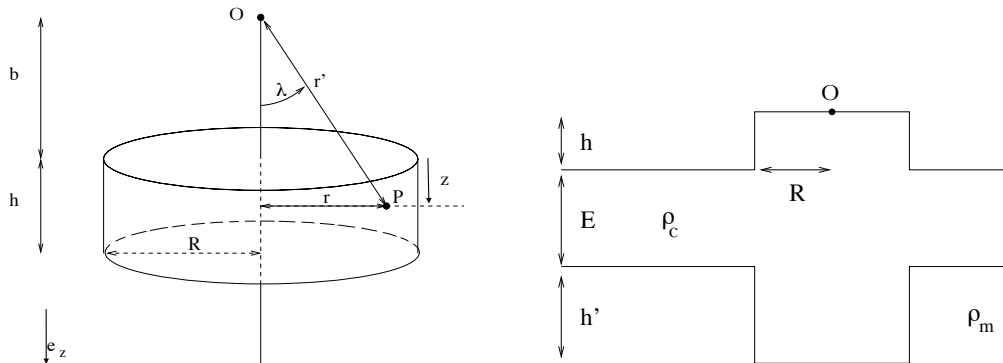


FIGURE 1 – Left : Cylinder. Right : topography and its crustal root

4. Deduce that :

$$g = \vec{g} \cdot \vec{e}_z = G\rho \int_V \frac{b+z}{(r^2 + (b+z)^2)^{3/2}} dV \quad (4)$$

In cylindrical coordinates this is written :

$$g = G\rho \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{b+z}{(r^2 + (b+z)^2)^{3/2}} r d\theta dz dr \quad (5)$$

5. By successively integrating the three integrals, show that :

$$g = 2\pi G\rho \left(h + \sqrt{R^2 + b^2} - \sqrt{R^2 + (b+h)^2} \right). \quad (6)$$

6. Tibet is considered to be a cylindrical plate of radius $R = 800$ km. Calculate the attraction, in mGal, of the Tibetan plate at the surface. Compare this to the attraction of an infinite plate.

7. The root is also considered as a cylindrical plate of the same radius. Calculate its attraction deficit at the surface. Compare it to the attraction of an infinite plate.

8. Give the sum of the attractions of the plate and the root. Compare with the values measured at the centre of this plateau and with the seismic Moho (fig 2). Conclusion.

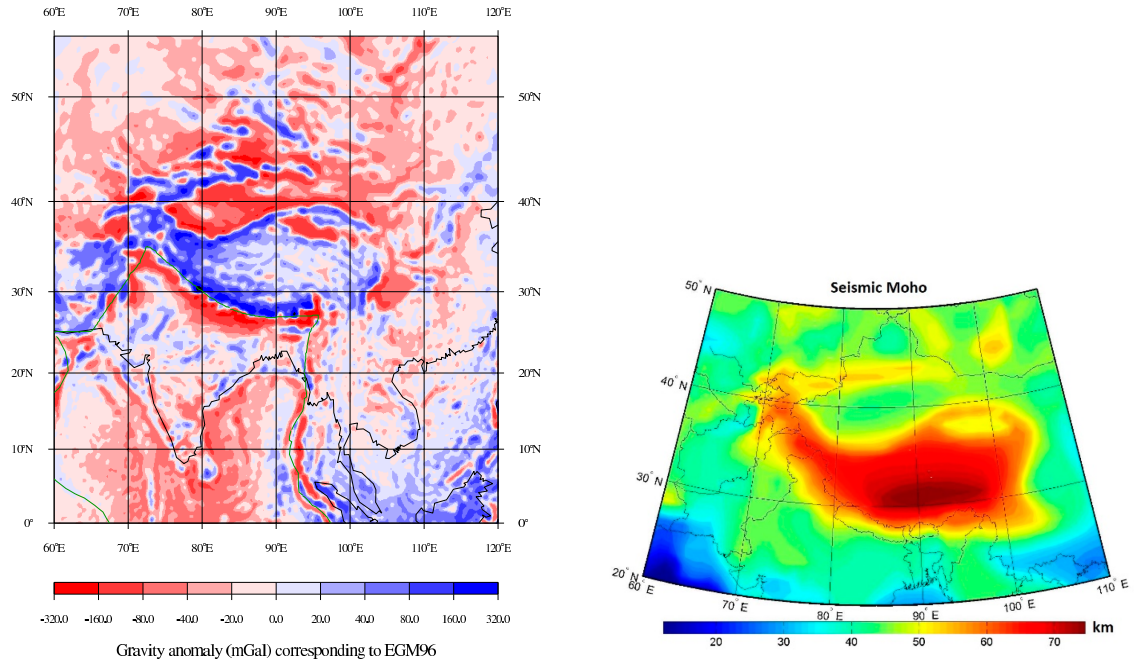


FIGURE 2 – Left : Free-air gravity anomalies (Chambat, 1997). Right : Depth of the Moho under Tibet as seen by seismic methods (Baranov, 2018, <https://doi.org/10.3390/geosciences8120461>)

2 Gravity field

Using Gauss's theorem, determine the gravity field outside a spherically symmetric planet of mass M .

3 Magnetism

Magnetisation measurements have been made on rocks in place and found to be 20°N , 30°E . The inclination found is $0 \pm 2^\circ$, the declination 40 degrees. What can you deduce about this rock?

4 Spacecraft

Next pages.

— o —

Geomagnetism

A spacecraft makes a flyby close to an unknown planet and records the three components of the magnetic field (Fig. 1). Our objective is to determine the direction of the rotation axis of the planet. The trajectory of the spacecraft is supposed to be straight and its relative velocity is large (about 15 km s^{-1}). Its closest point O is at a distance $d = 12000 \text{ km}$ to the centre of mass P of the planet. The coordinate along the trajectory is denoted by x (measured from O), the coordinate in the direction OP is denoted by y and the last coordinate z completes the orthogonal system of coordinates.

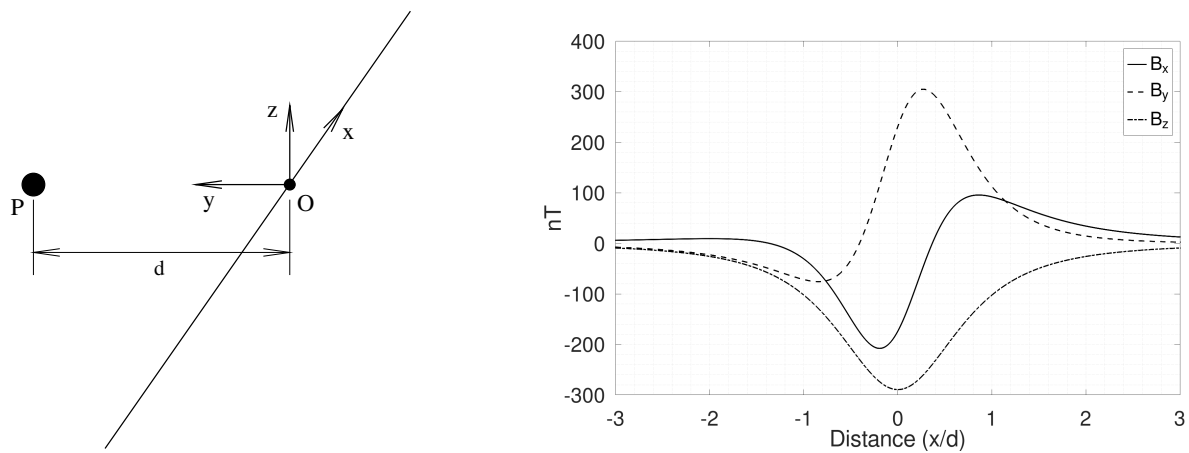


Figure 1: Spacecraft trajectory and magnetic profile.

- 1) What makes you favour the hypothesis of a dynamo-generated magnetic field from the general shape of the magnetic profiles, rather than a crustal magnetic field?
- 2) What structure do you expect for the magnetic field of the planet and what is its likely connexion with the direction of the rotation axis?
- 3) Assuming the magnetic moment of the planet is purely in the x -direction, draw the expected approximative curves of B_x , B_y and B_z along the spacecraft trajectory. Repeat the exercise for a magnetic moment along y , then along z .
- 4) In the same cases as in question 3, give the exact values of the magnetic components B_x , B_y et B_z , at the point O . In each case, the magnetic moment is assumed to be unity (1 Am^2) or of arbitrary magnitude.
- 5) From the superposition principle, determine the three components of the magnetic moment of the planet using the values of the magnetic field from the profiles at O (Fig. 1).
- 6) Compute the angle between the rotation axis of the planet and the direction of the spacecraft trajectory. Compute the angle between the rotation axis of the planet and the direction OP .

Reminder: the magnetic dipole of moment $\mathbf{M}$ produces the following magnetic field

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \|\mathbf{M}\|}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta],$$

in spherical coordinates with the rotation axis aligned with $\mathbf{M}$. The magnetic field can also be written intrinsically (independently of a coordinate system) as

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{M}].$$