Gravimétrie

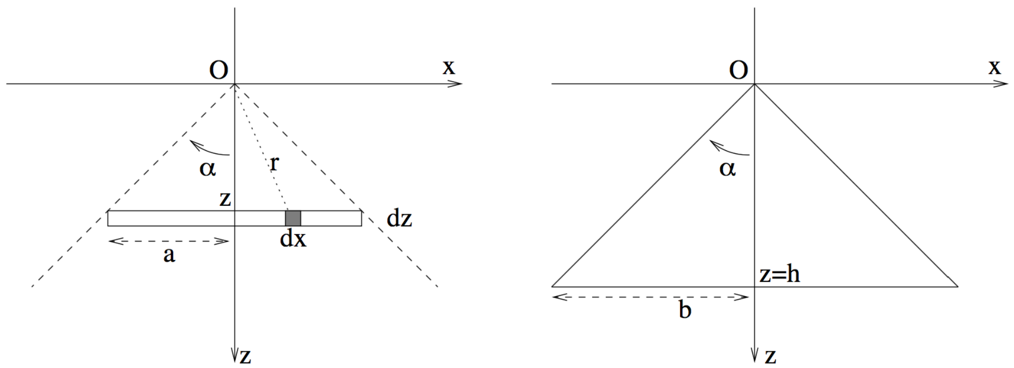
Durée 45min. Pas de documents autorisés.

Première estimation de la densité de la Terre par Bouguer

Dans *La Figure de la Terre*, 1749, pp. 357-364, écrit suite à son expédition en Équateur pour déterminer la longueur d'un degré de méridien, Bouguer donne pour la première fois une méthode d'estimation de la densité moyenne terrestre, et donc indirectement de la masse de la Terre, ou de la constante de gravitation. Nous allons reprendre les valeurs numériques qu'il a déduites de ses observations en Équateur. On prendra $R = 6371$ km pour le rayon de la Terre et on notera $\mathcal{G}$ la constante de gravitation. Les questions sont en grande partie indépendantes.

Attraction d'une chaîne de montagne

1. Soit un cylindre infini, de section rectangulaire $dx \times dz$ et de densité ρ. À l'aide du théorème de Gauss ($\int_S \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4\pi\mathcal{G} \int_V \rho dV$) exprimer l'attraction de ce cylindre en fonction des données du problème et de la distance r à ce cylindre. La section du cylindre sera prise infinitésimale si bien qu'on pourra considérer l'attraction à symétrie cylindrique.
2. On cherche l'attraction sur le plan de symétrie [1] d'une « planche », infinie suivant l'axe y, et d'épaisseur dz.



En projetant l'attraction de chaque cylindre infinitésimal sur l'axe Oz, en déduire l'expression de cette attraction. On rappelle la primitive :

$$\int \frac{dx/z}{1 + (x/z)^2} = \arctan(x/z). \tag{1}$$

3. En déduire que l'attraction au sommet d'une chaîne de montagnes en forme de prisme [2], infini suivant l'axe y, et de hauteur h, s'écrit

$$g = 4\mathcal{G}\rho\alpha h. \tag{2}$$

Analyse de Bouguer

4. Pour interpréter ses mesures faites dans la Cordillère des Andes, Bouguer a considéré le cas où α est égal à $\pi/2$. A votre avis pourquoi a-t-il fait cette hypothèse ? Est-elle légitime ? Quelle formule connue retrouve-t-on dans ce cas ?

On note g_0 la pesanteur au niveau de la mer (altitude $h = 0$), assez loin de la chaîne, et g_1 la pesanteur au sommet de la Cordillère (altitude h).

1. C'est-à-dire au point O de coordonnées $x = 0$, $y = 0$ sur la figure de gauche, gauche.
2. C'est-à-dire au point O sur la figure de droite.

5. Exprimer g_1 en fonction de g_0, et des autres paramètres du problème. Comment appelle-t-on les termes de cette relation ?
6. Exprimer g_0 puis $(g_0 - g_1)/g_0$ en fonction de la densité moyenne de la Terre $\bar{\rho}$, de son rayon R et des autres paramètres du problème.

Bouguer fait des mesures de pendule en ces deux points et trouve « une diminution d'une 1331^{eme} partie sur la longueur du pendule ... lorsqu'on monte du bord de la Mer à Quito. », ce qui correspond à $(g_0 - g_1)/g_0 = 1/1331$.

7. Il prend par ailleurs $h = 2.85$ km. Qu'en déduit-il pour le rapport $\bar{\rho}/\rho$?
8. En prenant $g_0 = 9.82$ ms^{-2} et la valeur maintenant connue de $\mathcal{G}$, $6.673\,10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, que trouve t'on pour $\bar{\rho}$? Comparer à la valeur que Bouguer aurait trouvé en prenant une valeur « raisonnable » de la densité de la montagne. Discuter.