Module de géophysique, M1, cours « Gravimétrie »,
Examen de janvier 2006

Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.

Documents : cours autorisé. Durée conseillée : 1h.

— o —

Données : $g_0 = 9,82$ ms^{-2} gravité de la Terre sphérique, $R_T = 6371$ km son rayon, $G = 6,673.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} constante de gravitation, $\rho_c = 2700$ kg/m^3 et $\rho_m = 3200$ kg/m^3 les densités de la croûte et du manteau supposés homogènes.

I. Isostasie

1. Rappeler la relation entre la topographie h et l'épaisseur H de la racine crustale dans la cas de l'équilibre isostatique.

2. Il y a 250 Ma la chaîne hercynienne était comparable à l'Himalaya ($h = 8000$ m). En supposant que la croûte est en équilibre isotatique, à l'actuel comme à l'hercynien, que pouvez-vous dire sur les roches que l'on trouve actuellement dans le Massif Central à une altitude de 1000 m ?

3. Soit un bassin de 1000 m de profondeur, avec un taux de sédimentation constant de 0,5 mm/an, combien de temps faut-il, en supposant l'équilibre isostatique réalisé, pour combler ce bassin ?

II. Anomalies de pesanteur

1. Pour la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde de référence on donne la formule approchée :

$$\gamma_E(\theta) = 978,03267(1 + 0,0052789 \sin^2 \theta). \tag{1}$$

Que signifie θ ? En quelle unité est donné ici γ ? Que vaut la pesanteur aux pôles et à l'équateur de l'ellipsoïde ?

2. On mesure sur la plateau des Andes (altitude 5 km, latitude -20°) une pesanteur $\gamma_{mes} = 977,18336$ Gal (l'effet de la marée est retiré). Que valent les anomalies de pesanteur à l'air libre et de Bouguer ? A votre avis la croûte est-elle en équilibre isostatique, pourquoi ?

III. Énergie gravitationnelle de la Terre

On va calculer l'énergie gravitationnelle de la Terre supposée homogène, de densité ρ, par accrétion de masses $\mathrm{d}m$ de même densité. Cette accrétion fait passer la Terre des rayons et masses $R = 0$, $M = 0$ aux rayons et masses actuels $R = R_T$, $M = M_T$.

1. Rappeler, sans les démontrer, l'expression de la gravité $\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} U$ et de son potentiel U à l'extérieur ($r \geq R$) d'une Terre sphérique en formation, de rayon $R \leq R_T$, en fonction de sa masse $M \leq M_T$.

2. On appelle énergie gravitationnelle $\mathrm{d}E$ apportée par un élément de masse $\mathrm{d}m$, le travail accompli par la gravité pour amener cette masse de l'infini à la surface de la Terre. Exprimer cette énergie en fonction des données du problème.

3. Un incrément de masse $\mathrm{d}m$ augmente le rayon moyen de la Terre de $\mathrm{d}R$. Exprimer $\mathrm{d}m$ en fonction de $\mathrm{d}R$.

4. Exprimer la masse M de la Terre en fonction de ρ. En déduire $\mathrm{d}E$ en fonction de ρ, R et $\mathrm{d}R$.

5. En déduire l'énergie gravitationnelle totale de la Terre en fonction de sa masse M_T et de son rayon actuel R_T. Donner sa valeur numérique.

6. Si on fait l'hypothèse que cette énergie est entièrement convertie en augmentation de température ΔT alors $E = M_T c_p \Delta T$ où la capacité calorifique massique vaut approximativement $c_p = 1000$ J/K/Kg. Quelle serait l'augmentation de température pour la Terre ? L'hypothèse est-elle plausible ?

7. En déduire, pour les corps en général (planètes, astéroïdes...), comment varie ΔT en fonction de leur rayon actuel. Donner le rayon en dessous duquel l'énegie gravitationnelle est insuffisante pour fondre le corps.

— o —

Module de physique du Globe, M1, cours « Gravimétrie »,
Examen de janvier 2006

Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.

Documents : cours autorisé. Durée : 45 min.

Observation de J_2 par les satellites

Nous allons montrer comment on peut déterminer l'*aplatissement dynamique* J_2 de la Terre à partir de l'observation de satellites. On calculera pour cela le lent mouvement de l'orbite supposée circulaire d'un satellite sous l'effet de cet aplatissement. Rappel : $J_2 = (C - A)/MR^2$ avec C, A, M, et R les moments d'inertie équatorial et polaire, la masse et le rayon moyen de la Terre.

On note Oab (cf. figure) le plan de l'équateur terrestre, Oc l'axe des pôles, Oxy le plan de l'orbite du satellite, Oz sa perpendiculaire, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ le vecteur rotation de $Oxyz$ par rapport à $Oabc$. Le référentiel $Oabc$ est ici supposé galiléen.

On considère une moyenne des effets sur une révolution du satellite : on remplace le satellite situé sur le cercle xPy par un anneau infiniment fin circulaire situé à la même distance $r = OP$, de même masse m que le satellite, et tournant autour de Oz à la vitesse angulaire Ω (égale à la vitesse de révolution du satellite). On note A', B', C' les moments d'inertie de l'anneau par rapport à O.

$\boxed{\textbf{1.}}$ La variation dans le repère $Oabc$ du moment cinétique de l'anneau s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} C'\Omega \sin\varepsilon\, \dot{\psi} \\ -C'\Omega\dot{\varepsilon} \\ C'\dot{\omega}_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Quelles hypothèses a-t-on faites pour obtenir ce résultat ?

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit $\vec{g}_T(P)$ l'attraction de la Terre et $\mathrm{d}\vec{\Gamma}$ le couple de cette attraction sur un élément de masse de l'anneau $\mathrm{d}m$ situé au point P entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. Exprimer $\mathrm{d}\vec{\Gamma}$ en fonction de $\vec{g}_T(P)$. En vous aidant du cours, c'est-à-dire sans calcul, en déduire que :

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \frac{3G\mathrm{d}m(C-A)}{r^3} \sin\theta\, \sin(-\varepsilon) \begin{pmatrix} \sin\theta\, \cos(-\varepsilon) \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Soit μ la masse par unité de longueur de l'anneau. Exprimer $\mathrm{d}m$ et m en fonction de μ. En déduire que le couple sur tout l'anneau s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{3Gm(C-A)}{2r^3} \sin\varepsilon \cos\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(on rappelle que $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 0$).

4. En déduire le mouvement de l'orbite.

5. Calculer C' en fonction de m et r.

6. Montrer finalement que

$$\frac{\dot{\psi}}{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\varepsilon. \tag{5}$$

7. L'orbite du satellite Lageos-2 a une altitude moyenne de 5780 km, est inclinée de 52,64° sur l'équateur terrestre et précesse d'un tour pendant 3683 révolutions du satellite. En déduire une valeur numérique de J_2. Est-il plus ou moins facile de déterminer J_2 en observant le mouvement de l'orbite *lunaire* ? Pour information la période de révolution de Lageos-2 est 223 min.[1].

8. Quelle observation permet d'obtenir la constante $H = \frac{C-A}{C} = 0.003274$? Soit l'inertie moyenne $I = (2A+C)/3$, exprimer I/MR^2 en fonction de J_2 et H. Déterminer ainsi la valeur numérique de I/MR^2. Qu'indique-t-elle ?

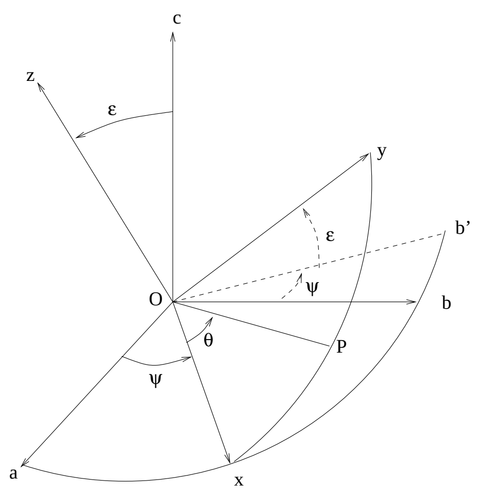

FIG. 1 – *Orbite xPy du satellite autour de la planète O.*

Texte disponible à `http://frederic.chambat.free.fr/ens`

[1]Les valeurs numériques de l'énoncé sont les valeurs réelles sauf 3683 que j'ai choisie de façon à trouver une valeur correcte de I/MR^2. La valeur obtenue pour J_2 ne correspond pas exactement à celle de la littérature où J_2 est défini par le rayon équatorial et non le rayon moyen.