Module de géophysique, M1, cours « Gravimétrie », Examen de janvier 2005

Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.

Documents : 1 page A4 autorisée. Durée : 1h.

— o —

Première estimation de la densité de la Terre par Bouguer

Dans *La Figure de la Terre*, 1749, pp. 357-364, écrit suite à son expédition en Équateur pour déterminer la longueur d'un degré de méridien, Bouguer donne pour la première fois une méthode d'estimation de la densité moyenne terrestre, et donc indirectement de la masse de la Terre, ou de la constante de gravitation. Nous allons reprendre les valeurs numériques qu'il a déduites de ses observations en Équateur.

On prendra $R = 6371$ km pour le rayon de la Terre. Les questions sont en grande partie indépendantes.

1. À l'aide du théorème de Gauss ($\int_{\partial V} \vec{g} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = -4\pi G \int_V \rho\, \mathrm{d}V$) montrer que l'attraction d'un cylindre infini, de section rectangulaire (largeurs infinitésimales $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}z$) et de densité ρ est $g_c(r) = 2G\rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z/r$ où r est la distance au cylindre. La section du cylindre étant infinitésimale on pourra considérer que l'attraction est à symétrie cylindrique.

2. On cherche l'attraction sur le plan de symétrie[1] d'une « planche », infinie suivant l'axe y, et d'épaisseur $\mathrm{d}z$. Pourquoi est-elle dirigée suivant l'axe Oz ? En projetant l'attraction de chaque cylindre infinitésimal sur l'axe Oz, en déduire que l'attraction s'écrit $g_p = 4G\rho\alpha\, \mathrm{d}z$? On rappelle la primitive :

$$\int \frac{\mathrm{d}x/z}{1 + (x/z)^2} = \arctan(x/z). \tag{1}$$

3. En déduire que l'attraction au sommet d'une chaîne de montagnes en forme de prisme[2], infini suivant l'axe y, et de hauteur h, s'écrit

$$g = 4G\rho\alpha h. \tag{2}$$

4. Pour interpréter ses mesures faites dans la Cordillère des Andes, Bouguer a considéré le cas où α est égal à $\pi/2$. A votre avis pourquoi a-t-il fait cette hypothèse ? Est-elle légitime ? Quelle formule connue retrouve-t-on dans ce cas ?

[1] C'est-à-dire au point O de coordonnées $x = 0$, $y = 0$ sur la figure 1, gauche.

[2] C'est-à-dire au point O sur la figure 1, droite.

On prendra désormais $g_m = 2\pi G\rho h$ pour l'*attraction* de la Cordillère en son sommet. On note g_0 la pesanteur au niveau de la mer (altitude $h = 0$), assez loin de la chaîne, et g_1 la pesanteur au sommet de la Cordillère (altitude h).

5. Exprimer g_1 en fonction de g_0, et des autres paramètres du problème. Comment appelle-t-on les termes de cette relation ?

6. Exprimer g_0 puis $(g_0 - g_1)/g0$ en fonction de la densité moyenne de la Terre $\bar{\rho}$, de son rayon R et des autres paramètres du problème.

7. Bouguer fait des mesures de pendule en ces deux points et trouve « une diminution d'une 1331^{eme} partie sur la longueur du pendule ... lorsqu'on monte du bord de la Mer à Quito. ». A l'époque on ajustait en effet la longueur du pendule pour qu'il batte toujours la seconde. Que vaut approximativement $(g_0 - g_1)/g0$? On rappelle que la période d'oscillation du pendule est $2\pi\sqrt{\ell/g}$ ou ℓ est la longueur du pendule et g la pesanteur.

8. Il prend par ailleurs $h = 2,85$ km. Qu'en déduit-il pour le rapport $\bar{\rho}/\rho$?

9. En prenant $g_0 = 9,82$ ms^{-2} pour la gravité de la Terre sphérique et $G = 6,673.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} pour la constante de gravitation que trouve-t-on actuellement pour $\bar{\rho}$? Comparer à la valeur que Bouguer aurait trouvé en prenant une valeur « raisonnable » de la densité de la montagne.

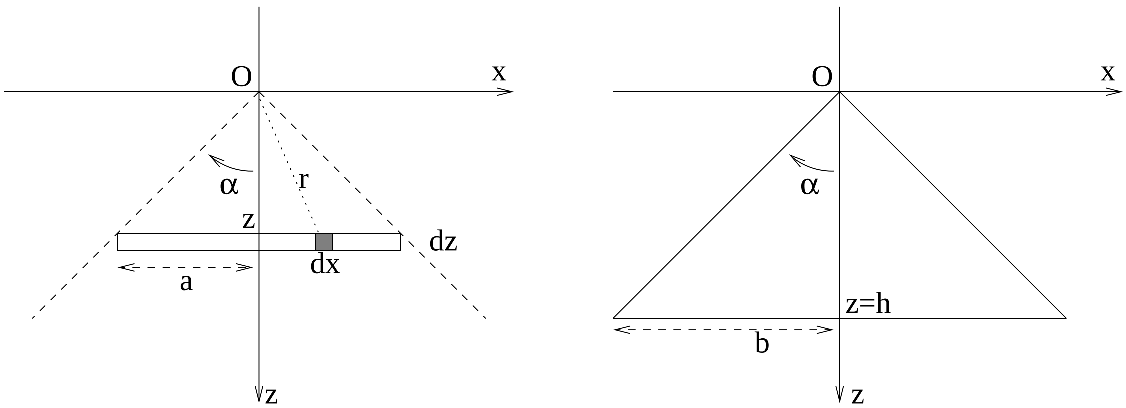

FIG. 1 –

Module de physique du Globe, M1, cours « Gravimétrie », Examen de janvier 2005

Master de sciences de la Terre, M1, ENS Lyon.

Documents : 1 page A4 autorisée. Durée : 40 min.

Limite de Roche

Le but du problème est d'estimer la *limite de Roche*, distance à la planète en dessous de laquelle un satellite peu résistant aux contraintes se brise sous l'effet des forces d'attraction.

Un satellite sphérique de masse m de rayon r fait une révolution autour de sa planète à une distance d constante (mouvement circulaire), d étant la distance de centre à centre. La planète est sphérique de masse M de rayon R (cf. fig. 1). Soient F_O et F_P la somme des forces d'attraction et centrifuge subies par les points O et P dans le référentiel lié au satellite et centré en O[1]. On prendra comme convention $F > 0$ si la force est dirigée vers la planète. La constante de gravitation est notée G.

1. F_O est la somme de la force d'attraction de la planète sur le satellite et de la force centrifuge de révolution du satellite. Écrire F_O en fonction de la vitesse angulaire Ω de révolution du satellite, de G, M et d. En déduire que $\Omega = \sqrt{GM/d^3}$. On suppose que la vitesse de rotation du satellite (sur lui-même) est identique à Ω ; que signifie cette hypothèse ? les satellites du système solaire la vérifient-ils ?

2. Faire le bilan des forces réelles et inertielles subies par le point P et en déduire F_P. On ne tient pas compte de la pression mais on ne néglige pas l'attraction du satellite.

3. Décrire l'effet physique de chacun des termes de F_P : ont-ils tendance à briser le satellite ou à le maintenir ?

4. En faisant un développement limité ($r << d$), et en utilisant la relation d'équilibre $F_O = 0$, simplifier l'expression de F_P en

$$F_P = \frac{Gm}{r^2} - 3\frac{GMr}{d^3}. \tag{3}$$

5. En déduire qu'il y a une distance limite d_l (appelée limite de Roche) en dessous de laquelle le satellite se brise. Donner l'expression de d_l en fonction des données du

[1] Les « points » étant de masse nulle ces « forces » sont en réalité des forces par unité de masse, c'est-à-dire des accélérations.

problème. L'exprimer en fonction des densités ρ_M et ρ_m de la planète et du satellite. En 1850, Roche a trouvé

$$d_l = 2,46 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}} R. \tag{4}$$

Quels phénomènes ou forces a-t-on négligés ?

6. Mimas, le satellite de Saturne de densité 1,44 est situé à une distance de 3,08 fois le rayon de cette planète. Les anneaux de glace de Saturne sont à une distance comprise entre 1,15 et 2,25 fois le rayon de la planète. La densité de Saturne est de 0,7. Est-ce que la théorie développée vous satisfait (la nôtre et/ou celle de Roche) ?

Complément lié aux actualités spatiales : Titan est à 20 rayons saturniens. Sa densité est 1,9.

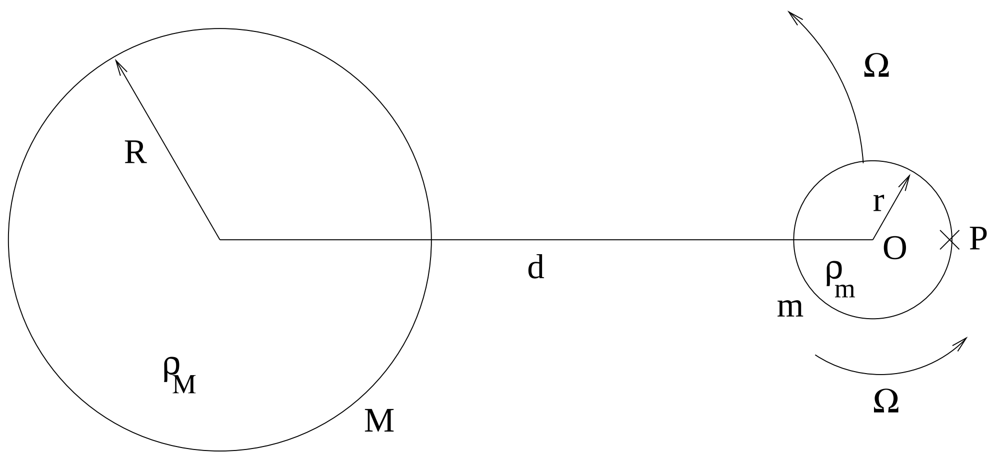

FIG. 1 – *Planète et satellite.*

— o —