Module de géophysique M11, cours « Gravimétrie », Examen de décembre 2003

Magistère de sciences de la Terre, Deuxième année, ENS Lyon.

Examen sans documents. Durée : 2h.

— o —

On prendra $G = 6,673.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} pour valeur de la constante de gravitation, $R = 6371$ km pour le rayon de la Terre et $g_0 = 9,81$ ms^{-2} pour la pesanteur de la Terre sphérique.

Anomalie d'une faille

1. À l'aide du théorème de Gauss ($\int_{\partial V} \vec{g} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}S = -4\pi G \int_V \rho\ \mathrm{d}V$) calculer l'attraction d'un plateau de densité ρ et d'épaisseur h.

2. En déduire la composante suivant z de l'attraction au dessus du coin d'un demi-plateau (point O sur la figure 1-gauche).

3. En déduire que cette composante en un point latéral de cote z (point D sur la figure 1-gauche) du demi-plateau est $\Delta g = \pi G \rho (h - 2z)$.

On considère une faille verticale séparant deux milieux de densités ρ_c et ρ_s (figure 1-droite). La référence pour la gravité (anomalie $\Delta g(A) = 0$) est celle de la gravité loin de la faille au dessus du milieu de densité ρ_c (point A).

4. Calculer, pour ce modèle, l'anomalie gravimétrique $\Delta g(B)$ loin de la faille de l'autre côté (point B) ? Quelles sont les anomalies à l'air libre $\Delta g_{AL}(B)$ et de Bouguer $\Delta g_B(B)$ correspondantes ?

5. Quelles sont les anomalies $\Delta g(C)$ et $\Delta g(D)$ au sommet et au pied du miroir de faille ?

6. Calculer numériquement ces anomalies en mGal avec $z = 50$ m, $h = 200$ m, $\rho_c = 2,7$, $\rho_s = 2,6$.

7. Sur le terrain on mesure en fait $\Delta g_{AL}(B) = 0,5$ mGal. Comment l'interprétez-vous ?

L'ellipsoïde homogène

Nous allons montrer que l'ellipsoïde homogène (dit *de Mac Laurin*) est une forme d'équilibre hydrostatique d'un corps autogravitant en rotation.

Soit un ellipsoïde homogène de densité ρ, de demi grand-axe a, à symétrie de révolution autour de son demi petit-axe c, et tournant à vitesse angulaire constante ω autour de cet axe. On appelle E l'excentricité de l'ellipsoïde définie par $E^2 = \frac{a^2-c^2}{c^2}$ et $\epsilon = \frac{a-c}{c}$ son aplatissement. Soit Ox, y, z le repère cartésien centré au centre de l'ellipsoïde, tel que Ox et Oy sont dans le plan équatorial et Oz est l'axe de rotation. On rappelle que la normale à cet ellipsoïde est un vecteur proportionnel à $(x/a^2, y/a^2, z/c^2)$. L'attraction de cet ellipsoïde à sa surface est $\vec{g} = (Px, Py, Qz)$ où P et Q sont les constantes :

$$P = -2\pi G\rho \frac{1+E^2}{E^3}\left(\arctan E - \frac{E}{1+E^2}\right), \tag{1}$$

$$Q = -2\pi G\rho \frac{1+E^2}{E^3} 2\left(E - \arctan E\right). \tag{2}$$

1. Pourquoi essaye-t-on *a priori* de modéliser la Terre par un ellipsoïde ?

2. Pourquoi la condition d'équilibre est la proportionnalité de la normale et de la pesanteur en surface ? Comment s'écrit la pesanteur en fonction de P, Q et ω ?

3. En déduire que l'équilibre impose $\omega^2 = \frac{Q}{1+E^2} - P$, puis que $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = f(E)$ où f est la fonction

$$f(E) = \frac{1}{E^3}\left((3+E^2)\arctan E - 3E\right). \tag{3}$$

4. La fonction f est représentée en fonction de $\sqrt{E}$ en figure 2. Le point P a pour coordonnées approximatives $\sqrt{E} = 1,6$; $f = 0,22$. À vitesse angulaire fixée combien de figures d'équilibre peuvent exister ? Ou se situe la Terre sur ce schéma ? Ou se situerait la nébuleuse protosolaire ?

5. On applique maintenant ces résultats à la Terre en supposant que $E << 1$. Le développement en 0 de arctan est :

$$\arctan(E) = E - \frac{E^3}{3} + \frac{E^5}{5} + \theta(E^7). \tag{4}$$

où $\theta(x)$ signifie *de l'ordre de x*. Développer $f(E)$ au voisinage de 0.

6. Montrer que l'attraction (en valeur absolue) à l'équateur est environ $g_e = \frac{4\pi G\rho a}{3}$.

7. Montrer que $E^2 \simeq 2\epsilon$. En déduire la relation trouvée par Newton :

$$\epsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a}{g_e} \tag{5}$$

8. Le rapport $m = \frac{\omega^2 a}{g_e}$ de la force centrifuge et de l'attraction à l'équateur est environ 1/289. Comment est-il estimé ? En déduire ϵ. Pourquoi ne trouve-t-on pas la valeur observée 1/298 ?

9. Saturne a un rayon polaire de 54 364 km un rayon équatorial de 60 268 km, un rayon moyen de 58 232 km, une masse de 5,68 10^{26} kg et une période de rotation de

10,66 h[1]. On ne suppose plus que $E << 1$. Calculer ϵ, E, la densité moyenne ρ, et la vitesse angulaire ω de Saturne. Est-ce compatible avec la théorie de l'ellipsoïde homogène ? Avec cette théorie, quelle valeur d'aplatissement correspond à la valeur observée de $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$?

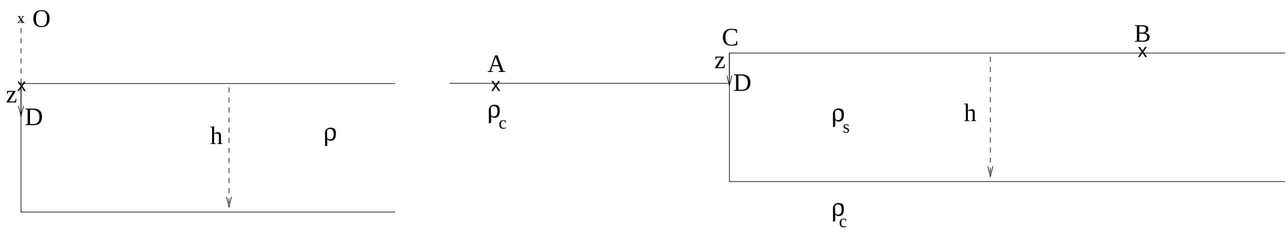

FIG. 1 –

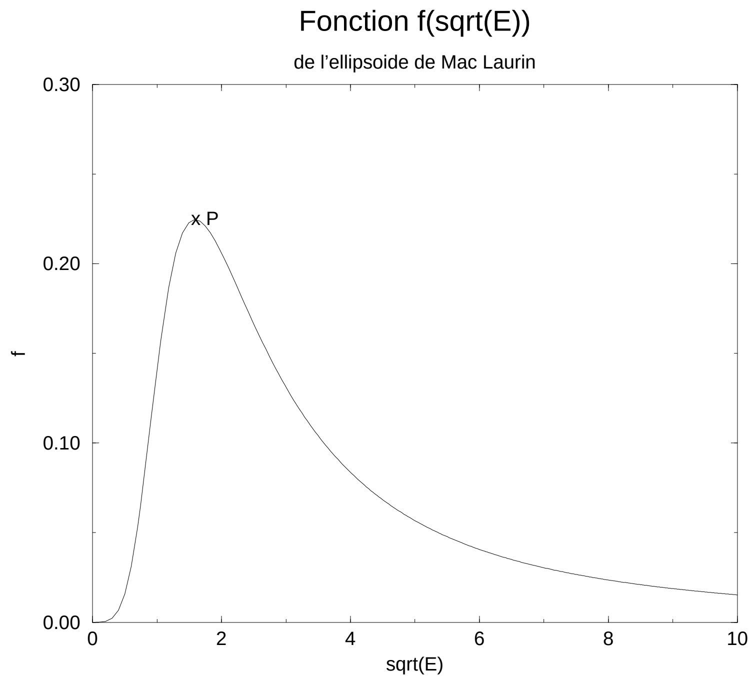

FIG. 2 –

— o —

Texte disponible à `http://frederic.chambat.free.fr/ens`

[1]Données issues de `http ://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturnfact.html`.

Éléments de correction pour Saturne : fichier Matlab et résultats

```
% Éllipsoïde homogène de Mac Laurin
% Crèt figure fE1.eps et fE2.eps
% fE.eps a été créé directement avec xmgr

E=logspace(-2,1,1000);% 2eme excentricité,=(a^2-c^2)/c^2 de 1/100 à 100

f=((3+E.^2).*atan(E)-3*E)./E.^3;
figure(1)
plot(E,f)
title('f(2eme excentricite)')
xlabel('E2')
print -deps2 fE2.eps

%e=sqrt(E.^2+1)-1;plot(e,f)

EE=sqrt(E.^2./(1.+E.^2));
figure(2)
plot(EE,f)
title('f(1ere excentricité)')
xlabel('E1')
print -deps2 fE1.eps

% Saturne
a=60268e3
c=54364e3
R=58232e3
T=10.66*3600
M=5.68e26
G=6.673e-11

e=(a-c)/c
ES=sqrt(2*e+e^2)
w=2*pi/T
rho=3*M/(4*pi*R^3)
```

```
w^2/(2*pi*rho*G)
fS=((3+ES^2)*atan(ES)-3*ES)/ES^3

% Quel est le e qui correspond au w ?
% Apres qq essais on trouve :
e=0.225
ES=sqrt(2*e+e^2)
fS=((3+ES^2)*atan(ES)-3*ES)/ES^3
```

Résultats :

```
>> fE

a = 60268000
c = 54364000
R = 58232000
T =    38376
M = 5.6800e+26
G = 6.6730e-11

e  = 0.1086
ES = 0.4785
w  = 1.6373e-04
rho =  686.7120
ans = 0.0931
fS = 0.0510
e  = 0.2250
ES = 0.7075
fS = 0.0930
```

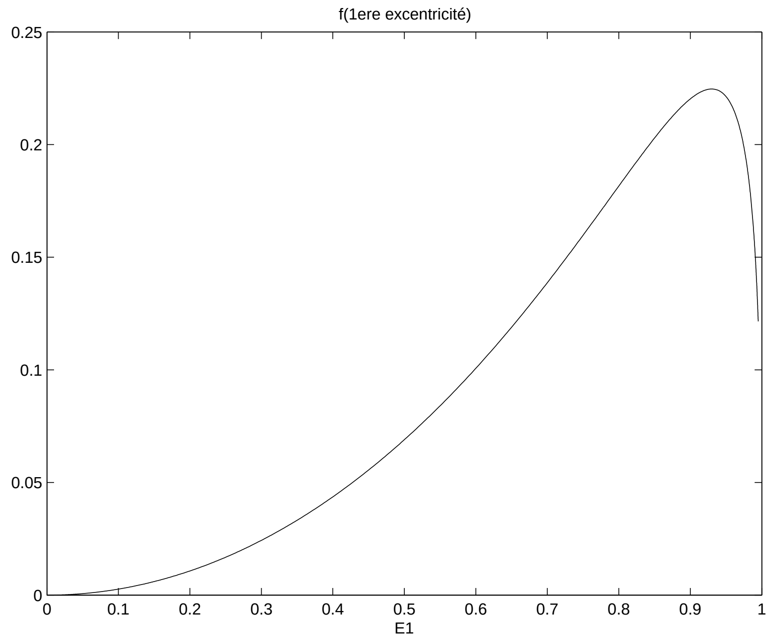
f(1ere excentricité)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
E1

FIG. 3 –

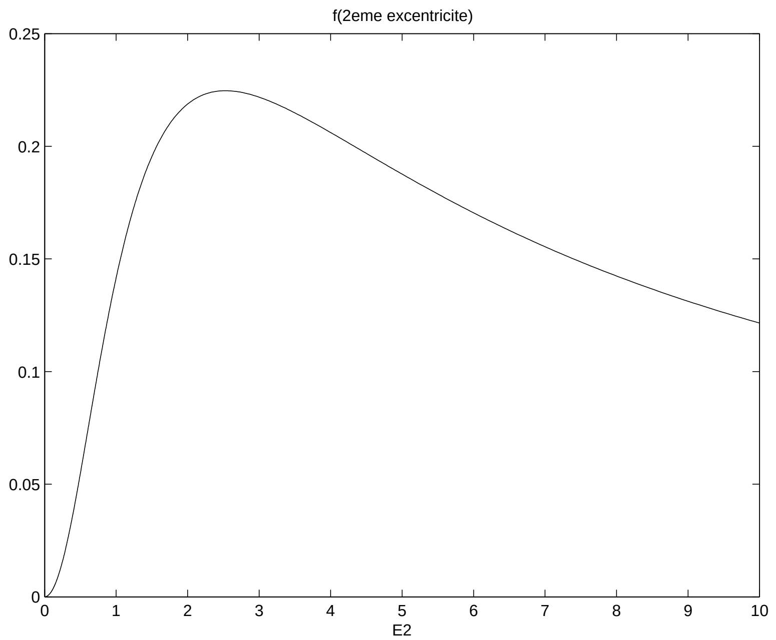
f(2eme excentricite)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E2

FIG. 4 –