

Mécanique globale de la Terre

Notes de cours
Frédéric Chambat ¹
ENS de Lyon

Version du 26 février 2019

Table des matières

1 Mécanique du point et des systèmes	3
1.1 Lois pour un point	3
1.2 Lois pour un système	4
1.3 Systèmes continus	6
1.4 Passage aux référentiels non galiléens	8
1.5 Différence entre référentiel et repère	11
1.6 Quelques référentiels en géophysique	11
2 La marée, approche descriptive	13
2.1 Une première explication	13
2.2 La force de marée	14
2.3 Amplitude et direction de la force de marée	17
2.4 La déformation de la Terre, un ordre de grandeur	19
2.5 La déformation de la Terre, un profil oblong	20
2.6 Déformation de la Terre solide	21
2.7 Notion d'ondes de marées	24
2.8 Déformation des océans	24
2.8.1 Un phénomène dynamique	24
2.8.2 Première conséquence ; l'océan fictif global	25
2.8.3 Les vrais océans	27
3 La marée en calcul	29
3.1 Les forces de marées	29
3.2 Hypothèse de la Terre sphérique	30
3.3 La marée du baccalauréat. Déformation statique fluide	34
3.4 Statique versus dynamique	37
3.5 Déformation élastique	39
3.6 Contrainte sur la surface déformée, et pas sphérique	44
3.7 Potentiel de redistribution des masses	44
3.8 Les marées océaniques	46

1. fchambat [arobase] ens-lyon.fr

4	Les marées dans l'Univers	54
4.1	Les forces de marées sur les humains	54
4.2	Marée galactique	55
4.3	A faire	56
5	Histoire des marées	56
6	La marée en pratique	56
6.1	Sur les continents	56
6.2	Les ondes de marées	56
6.3	Dans les océans	56
7	Rotation de la Terre et des planètes	59
7.1	Le tenseur d'inertie	59
7.2	Moments cinétiques dans le système solaire	60
7.3	Moment cinétique du système Terre-Lune	62
7.4	La rotation axiale ou <i>durée du jour</i>	63
7.5	Energie cinétique de rotation	64
7.6	Systèmes d'axes	65
7.7	Angles d'Euler	67
7.8	Questions de vocabulaire : précession et mouvement du pôle .	68
7.9	Théorème du moment cinétique	68
7.10	Équations d'Euler	69
7.11	Le mouvement libre ou <i>mode d'Euler</i>	70
7.12	La précession-nutation forcée	74
7.13	Terre réformable : les équations de Liouville	81
7.14	Mouvement séculaire du pôle	82
8	Bibliographie	83

1 Mécanique du point et des systèmes

Les deux premières sections reviennent sur les bases des lois de la mécanique pour des particules. Si on veut aller à l'essentiel, on peut lire directement la troisième section, sur les lois de la mécanique pour les systèmes continus.

1.1 Lois pour un point

La mécanique repose sur trois principes énoncés par Newton (1687). Comme les axiomes en mathématiques, ce sont des lois qui forment un socle permettant de construire une théorie rendant compte de la réalité. Après avoir défini la *force* comme une *interaction entre deux corps modifiant une variation de l'état de mouvement des corps*, et une *particule* ou un *point* comme un *corps ponctuel*, on peut écrire les lois sous la forme moderne suivante.

1. Première loi (principe d'inertie)

Il existe des référentiels dits *galiléens* tels que dans ces référentiels le mouvement d'un point isolé est une translation rectiligne uniforme.

2. Deuxième loi (principe fondamentale de la dynamique, *pdf*)

Dans un référentiel galiléen, la variation de quantité de mouvement d'un point de masse m est égale à la somme des forces exercées sur ce point :

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \sum \vec{f}. \quad (1)$$

3. Troisième loi (loi d'action-réaction)

La force $\vec{f}_{M/M'}$ exercée par une particule M sur M' est l'opposée de la force exercée par M' sur M et est dans la direction de $\overrightarrow{MM'}$:

$$\vec{f}_{M'/M} = -\vec{f}_{M/M'} \propto \overrightarrow{MM'}. \quad (2)$$

Remarques :

- la force peut-être attractive ou répulsive.
- la condition de colinéarité $\vec{f}_{M/M'}$ et $\overrightarrow{MM'}$ est rarement énoncée dans les ouvrages de mécanique ; c'est parce qu'elle est utile pour les systèmes de points, et comme on le verra plus loin, le théorème du moment cinétique, plus populaire, lui est équivalent.
- en mécanique newtonienne, c'est-à-dire pour des vitesses non relativistes, la masse d'une particule est constante et la variation de quantité de mouvement s'écrit aussi comme le produit de la masse par l'accélération : $\frac{d}{dt}m\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$.
- l'énoncé du *pdf* reproduit l'observation que l'interaction entre deux corps est proportionnelle à l'accélération.
- la troisième loi implique (en faisant $M = M'$) qu'une particule n'exerce aucune force sur elle-même :

$$\vec{f}_{M/M} = \vec{0} \quad (3)$$

Ceci assure la concordance des deux premières lois dans la mesure où un corps isolé correspond bien à un corps ne subissant aucune force. Exemple : l'attraction entre deux particules de masses m et m' :

$$\vec{f}_{M/M'} = -\frac{Gmm'}{MM'^3}\overrightarrow{MM'}. \quad (4)$$

Pour un point, il découle du *pdf* le :

4. Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation de moment cinétique est égale à la somme des couples des forces par rapport à un point A fixe :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}) = \sum \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}. \quad (5)$$

1.2 Lois pour un système

On doit le plus souvent étudier en physique un *système* de particules en interaction entre elles-mêmes mais aussi avec l'extérieur ; définissons ces notions.

Définitions

Soit un ensemble de particules $i = 1, \dots, N$, on appelle *système* un sous-ensemble $i = 1, \dots, n$ ($n \leq N$) de particules. On appelle *particules intérieures* celles qui font partie du système ($i \leq n$), *particules extérieures* celles qui n'en font pas partie ($i > n$). On notera $\vec{f}_{j/i}$ la force de la particule j sur la particule i . On appellera *forces extérieures* les forces des particules extérieures ($j > n$) sur les particules du système ($i \leq n$) et *forces intérieures* les forces des particules intérieures sur les particules du système. On abrégera en $\vec{f}_{int/i}$ et $\vec{f}_{ext/i}$ la somme de toutes les forces intérieures et extérieures sur i :

$$\vec{f}_{int/i} := \sum_{j=1}^n \vec{f}_{j/i} \quad \vec{f}_{ext/i} := \sum_{j=n+1}^N \vec{f}_{j/i}. \quad (6)$$

On appelle *résultante* d'une force, la somme de cette force sur l'ensemble des particules du système.

On montre alors qu'un système n'exerce aucune résultante sur lui-même :

Propriété

La résultante des forces intérieures est nulle :

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_{int/i} = \vec{0}. \quad (7)$$

Dém. : cela provient du fait que la résultante fait intervenir la somme sur tous les couples de points de la force du premier point sur le second plus la force du second sur le premier. Ces deux forces s'annulent et c'est vrai pour tous les couples donc la somme est nulle. La démonstration formelle est un peu laborieuse :

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_{int/i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{j/i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j<i} \vec{f}_{j/i} + \vec{f}_{i/i} + \sum_{j>i} \vec{f}_{j/i} \right). \quad (8)$$

La deuxième somme est nulle en vertu de la troisième loi ($\vec{f}_{i/i} = 0$). On modifie l'expression de la troisième somme en remarquant que l'ensemble de particules $i = 1, n; j > i$ est le même que $j = 1, n; j > i$ puis en changeant les indices de noms et enfin en utilisant la troisième loi :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \vec{f}_{j/i} = \sum_{j=1}^n \sum_{j>i} \vec{f}_{j/i} = \sum_{i=1}^n \sum_{i>j} \vec{f}_{i/j} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \vec{f}_{j/i} \quad \text{c.q.f.d.} \quad (9)$$

Notons \vec{v}_i la vitesse de la particule i de masse m_i de sorte que $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ est la quantité de mouvement du système. En appliquant le *pdf* pour chacune des particules et en utilisant la propriété qui précède il est aisé de montrer :

Propriété (*pdf* d'un système)

Dans un référentiel galiléen, la variation de quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ext/i}. \quad (10)$$

La quantité de mouvement d'un système isolé est donc constante. Exemples : le skieur qui, sur le télésiège, saute de son siège ; la propulsion de l'avion à réaction : l'avion communique par ses réacteurs une quantité de mouvement à l'air, or le système air+avion a une quantité de mouvement fixe (oublions les frottements) donc la quantité de mouvement de l'avion s'accroît dans le sens opposé à celui de l'air.

Soit A un point fixe quelconque, M_i la position de la particule i , $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i$ la masse du système, on définit le *centre de masse* du système² comme le point G tel que :

$$\overrightarrow{AG} := \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{AM}_i, \quad (11)$$

ou, ce qui est équivalent, $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$. On vérifie facilement que le point G est indépendant du choix de A . La vitesse du centre de masse vaut :

$$\vec{V} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (12)$$

On montre alors aisément que le *pdf* d'un système peut, comme celui d'un point, s'écrire en fonction d'une accélération, celle-ci étant l'accélération du centre de masse :

Propriété (*pdf* d'un système)

Dans un référentiel galiléen la résultante des forces extérieures est proportionnelle à la masse totale et à l'accélération du centre de masse :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M} \vec{V} = \mathcal{M} \frac{d^2 \overrightarrow{AG}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ext/i}. \quad (13)$$

2. Souvent appelé aussi *centre d'inertie*.

Plus loin dans le cours, quand on saura passer d'un référentiel à un autre, on pourra en conclure que le centre de masse d'un système isolé ($\vec{f}_{ext/i} = \vec{0}$) peut être pris comme centre d'un référentiel galiléen. Par ailleurs, deux autres propriétés utiles sont dérivées du *pdf*. La première permet de faciliter la résolution des problèmes de rotation ou de révolution des corps, la deuxième est souvent utile lorsqu'on n'a pas à connaître la trajectoire des corps mais uniquement les états initial et final³.

Théorème du moment cinétique

On appelle *moment cinétique* par rapport à A et *moment des forces extérieures*, ou *couple*, les vecteurs

$$\vec{H} := \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad \vec{C} := \sum_{i=1}^n \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{f}_{ext/i}. \quad (14)$$

Alors, dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{C}. \quad (15)$$

Théorème de l'énergie cinétique

On appelle *énergie cinétique* du système, *puissance des forces intérieures* et *puissance des forces extérieures* sur le système, les quantités :

$$E_c := \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad \mathcal{P}_{int} := \sum_{i=1}^n \vec{f}_{int/i} \cdot \vec{v}_i, \quad \mathcal{P}_{ext} := \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ext/i} \cdot \vec{v}_i, \quad (16)$$

Alors, dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}. \quad (17)$$

Ces deux théorèmes se montrent facilement à partir des résultats qui précèdent, notamment les deuxième et troisième lois. Le premier implique que le moment cinétique d'un système isolé est constant. Rappelons l'exemple célèbre de la patineuse qui étend les bras (les distances AM_i augmentent en moyenne), alors sa vitesse de rotation diminue (les v_i diminuent en moyenne) pour conserver le moment cinétique. Par contre, l'énergie cinétique d'un système isolée n'est pas nécessairement constante, elle peut être modifiée par les forces internes, comme le montre également l'exemple de la patineuse.

1.3 Systèmes continus

Les systèmes continus ne sont plus décrits par des particules indépendantes mais par des champs définis dans tout le volume V du système de bord ∂V : la densité de matière ρ , le champ de vitesse \vec{v} , les densités massiques des forces à distance intérieures et extérieures \vec{f}_{int} et \vec{f}_{ext} ; en plus

3. On dit que le théorème de l'énergie cinétique fournit une *intégrale première* du mouvement.

des forces à distance \vec{f} , il existe des forces de contact, les tractions \vec{T} qui s'appliquent en surface du volume. Les relations (13),(15),(17) s'écrivent alors⁴ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f}_{ext} dV + \int_{\partial V} \vec{T} dS, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{v} dV = \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{f}_{ext} dV + \int_{\partial V} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} dS, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \rho \vec{f}_{ext} \cdot \vec{v} dV + \int_V \rho \vec{f}_{int} \cdot \vec{v} dV. \quad (20)$$

La relation (7) se généralise en :

$$\int_V \rho \vec{f}_{int} dV = \vec{0}, \quad \int_V \overrightarrow{AM} \wedge \rho \vec{f}_{int} dV = \vec{0}. \quad (21)$$

Il faut noter que le volume V suit les particules : il est changeant au cours du temps. Les quantités qui apparaissent sont respectivement la masse du système, la position de son centre de masse, sa quantité de mouvement, son moment cinétique, la résultante des forces extérieures, le couple des forces extérieures, son énergie cinétique, la puissance des forces intérieures et extérieures :

$$\mathcal{M} := \int_V \rho dV \quad \overrightarrow{AG} := \frac{1}{\mathcal{M}} \int_V \rho \overrightarrow{AM} dV \quad (22)$$

$$\mathcal{M}\vec{V} := \int_V \rho \vec{v} dV \quad \vec{R} = \int_V \rho \vec{f}_{ext} dV + \int_{\partial V} \vec{T} dS \quad (23)$$

$$\vec{H} := \int_V \rho \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} dV \quad \vec{C} := \int_V \rho \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_{ext} dV + \int_{\partial V} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} dS \quad (24)$$

$$Ec := \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (25)$$

$$\mathcal{P}_{int} := \int_V \rho \vec{f}_{ext} \cdot \vec{v} dV \quad \mathcal{P}_{ext} := \int_V \rho \vec{f}_{int} \cdot \vec{v} dV \quad (26)$$

Les trois dernières lois s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}\vec{V} = \vec{R} \quad (27)$$

4. On rappelle que A est un point quelconque mais fixe.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{C}, \quad (28)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}. \quad (29)$$

Notons que la quantité de mouvement et sa dérivée sont celles du centre de masse qui auraient toute la masse du système :

$$\mathcal{M}\vec{V} = \mathcal{M} \frac{d}{dt} \overrightarrow{AG} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{M}\vec{V} = \mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{AG}. \quad (30)$$

On en déduit ce résultat important que l'accélération du centre de masse d'un système isolé ($\vec{f}_{ext} = \vec{T} = 0$) est nulle et peut donc être pris comme centre d'un référentiel galiléen.

1.4 Passage aux référentiels non galiléens

Supposons donc connu un référentiel galiléen R , matérialisé par un centre O et des axes orthogonaux Ox_1, Ox_2, Ox_3 , dans lequel les lois de la mécanique énoncées précédemment s'appliquent. Afin de travailler dans d'autres référentiels, il faut savoir comment se transposent les lois de la mécanique dans ces autres référentiels. Soit donc un autre référentiel R' de centre O' d'axes orthogonaux $O'x'_1, O'x'_2, O'x'_3$. Notons $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ les repères orthonormés associées aux axes, et $\vec{u} = u_i \vec{e}_i = u'_i \vec{e}'_i$ (somme sur les indices $i = 1, 2, 3$) un vecteur quelconque. Si R' est mobile par rapport à R , l'évolution de \vec{u} diffère suivant que l'observateur est fixe dans l'un ou l'autre des repères. La dérivée temporelle de \vec{u} se définit donc dans un repère donné, en gardant fixes les directions des axes du repère, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R := \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\vec{e}_i} = \frac{du_i}{dt} \vec{e}_i \quad \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R'} := \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\vec{e}'_i} = \frac{du'_i}{dt} \vec{e}'_i. \quad (31)$$

Pour passer de l'une à l'autre de ces dérivées, plaçons-nous dans R , c'est-à-dire que l'on considère les \vec{e}_i fixes. Alors

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \left. \frac{du_i \vec{e}_i}{dt} \right|_{\vec{e}_i} = \left. \frac{du'_i \vec{e}'_i}{dt} \right|_{\vec{e}_i} = \frac{du'_i}{dt} \vec{e}'_i + u'_i \left. \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right|_{\vec{e}_i}. \quad (32)$$

Or, on peut montrer la :

Propriété

Il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ appelé *vecteur rotation de R' par rapport à R* tel que les dérivées des vecteurs de base s'obtiennent par produit vectoriel avec $\vec{\Omega}$:

$$\left. \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right|_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}'_i \quad \forall i. \quad (33)$$

Dém : On utilise le fait que les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux : $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$. On dérive ces relations puis on cherche les coefficients α_{jk} tels que $d\vec{e}'_i/dt = \sum_k \alpha_{jk} \vec{e}'_k$. Il faut voir ensuite que le résultat s'écrit comme un produit vectoriel.

On est ainsi conduit à la :

Propriété

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{u}. \quad (34)$$

Définissons les vitesses et les accélérations d'un point M dans chacun des repères par :

$$\vec{v}(M)_R := \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R \quad \vec{v}(M)_{R'} := \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R'}, \quad (35)$$

$$\vec{a}(M)_R := \left. \frac{d\vec{v}(M)_R}{dt} \right|_R \quad \vec{a}(M)_{R'} := \left. \frac{d\vec{v}(M)_{R'}}{dt} \right|_{R'}. \quad (36)$$

On montre alors le :

Théorème de composition des vitesses et des accélérations

$$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}(O')_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}, \quad (37)$$

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{a}(O')_R + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (38)$$

Dém : Pour montrer la relation sur les vitesses il suffit d'utiliser les définitions des vitesses et la relation (34) :

$$\vec{v}(M)_R = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_R = \vec{v}(O')_R + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (39)$$

Pour l'accélération, c'est la même démarche :

$$\vec{a}(M)_R = \left. \frac{d}{dt} \left(\vec{v}(M)_{R'} + \vec{v}(O')_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \right|_R. \quad (40)$$

Le premier terme du membre de droite s'écrit aussi

$$\left. \frac{d\vec{v}(M)_{R'}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}, \quad (41)$$

le deuxième

$$\left. \frac{d\vec{v}(O')_R}{dt} \right|_R = \vec{a}(O')_R, \quad (42)$$

et le troisième

$$\left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R'} \right|_R = \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \right|_R, \quad (43)$$

ce qui conduit au résultat.

Remarque : les vitesses $\vec{v}(M)_R$ et $\vec{v}(M)_{R'}$ sont souvent appelées *vitesse absolue* et *vitesse relative*, et la différence $\vec{v}(M)_R - \vec{v}(M)_{R'} = \vec{v}(O')_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ est appelée *vitesse d'entraînement*. $\vec{v}(O')_R$ est un terme de translation et $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ un terme de rotation rigide. Si le point M est fixe dans R' la vitesse d'entraînement est celle du point vue dans le repère R et due au mouvement de R' par rapport à R . Les termes $\vec{a}(M)_R$, $\vec{a}(M)_{R'}$ et $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}$ sont appelées *accélération absolue*, *accélération relative* et *accélération complémentaire* ou de Coriolis. Le terme restant s'appelle *accélération d'entraînement* ; il contient $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ nommé *accélération centripète*.

On peut ainsi écrire la première loi dans le référentiel R' :

Pfd dans un référentiel quelconque

Dans un référentiel quelconque R' en mouvement par rapport au référentiel galiléen R , c'est-à-dire en rotation $\vec{\Omega}$ et translation $\vec{v}(O')_R$ par rapport à R , le pfd d'une particule s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{R'} = \frac{1}{m} \sum \vec{f} - \vec{a}(O')_R - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (44)$$

Il faut faire attention que si la particule est au sein d'un milieu continu alors $\sum \vec{f}$ comprend des forces de surface, écrites usuellement en fonction du tenseur des contraintes σ :

$$\frac{1}{m} \sum \vec{f} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \sigma + \sum \vec{f}_{vol} \quad (45)$$

où \vec{f}_{vol} ne contient que les (densités massiques des) forces de volume.

Remarques :

- le fait d'écrire le pfd dans un repère non galiléen introduit donc des forces fictives que l'on appelle *force d'inerties*, dont les plus connues sont les forces centrifuge et de Coriolis représentées par les 3^e et 4^e termes du deuxième membre.

- si R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R ($\vec{\Omega} \equiv \vec{0}$ et $\vec{a}(O')_R \equiv \vec{0}$) alors $\vec{a}(M)_{R'} = \vec{a}(M)_R$ si bien que le pfd dans sa version initiale (eq. 1) est valable. Tous ces types de référentiels sont alors dits *galiléens*, et vice-versa : tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

- quels référentiels faut-il considérer comme galiléens? La réponse dépend du problème physique à résoudre⁵. Il faut commencer par identifier le système total de corps qui intervient dans le problème physique et que l'on pourra supposer isolé du reste de l'Univers. Le principe d'inertie suppose qu'il existe alors un référentiel dans lequel le pfd est vérifié pour ces corps. Nous avons montré que le centre de masse du système total est en translation uniforme dans ce référentiel et que le moment cinétique du système

5. Voir aussi Cabannes, 1962, p. 50-55.

total est conservé. Le plus souvent *on choisit donc comme référentiel galiléen un référentiel centré au centre de masse du système total considéré et dont les axes sont tels que le moment cinétique total est constant*. En mécanique planétaire, on considère usuellement le centre de masse du Système Solaire et d'axes pointant vers des objets célestes « fixes » sur la voûte céleste, matérialisés par exemple par des étoiles ou des Quasars.

- pour les systèmes, les lois (18)-(29) sont des conséquences de $\vec{f} = m\vec{a}$, elles sont donc vraies dans les référentiels non galiléens, à condition d'inclure les forces inertielles dans les forces extérieures.

1.5 Différence entre référentiel et repère

Un *référentiel* est différent d'un *repère*. Le premier est constitué d'un système de coordonnées de l'espace et du temps permettant de repérer des points au cours du temps. Le système de coordonnées spatiales est souvent matérialisé par un centre et des axes cartésiens.

Un repère est constitué d'un système de coordonnées de l'espace, souvent matérialisé par un centre et des axes cartésiens.

Par conséquent, la différence entre les deux est que le référentiel sert à faire de la mécanique : on peut y définir la vitesse, l'accélération, etc. C'est dans un référentiel qu'on écrit les lois de la mécanique. Le repère ne sert qu'à repérer des points, c'est-à-dire à assigner des distances.

Souvent on confond les deux puisqu'on utilise les mêmes coordonnées pour le référentiel et le repère. Mais ce n'est pas obligatoire. Dans ce cours, la différence apparaîtra notamment quand nous évoquerons les marées : on fera de la mécanique dans le référentiel géocentrique, mais il pourra être utile d'utiliser provisoirement un repère tournant avec la Lune pour exprimer les composantes de la force de marée.

1.6 Quelques référentiels en géophysique

Pour la mécanique globale de la Terre, définissons trois référentiels :

- le référentiel de Copernic R_C , centré au centre de masse du Système Solaire et d'axes pointant vers des étoiles fixes,
- le référentiel R centré au centre de masse du système Terre-Lune et d'axes pointant vers des étoiles fixes,
- le référentiel géocentrique R_g centré au centre de masse de la Terre et d'axes pointant vers des étoiles fixes,
- le référentiel terrestre R_T centré au centre de masse de la Terre et d'axes liées à la Terre, c'est-à-dire en rotation avec elle⁶.

Le plus souvent, il suffit de supposer que R_c est galiléen (cela revient à peu près à négliger les forces de marées galactiques). A partir de maintenant, nous supposerons que le système Terre-Lune est isolé, le référentiel R

6. En toute généralité, le choix de la liaison de R_T avec la Terre n'est pas trivial puisque celle-ci se déforme sans cesse. Ce point sera précisé.

sera donc galiléen. Ajouter le Soleil après coup se fera facilement : il suffira de rajouter sa force de marée, qui a la même expression que celle de la Lune.

Le *pdf* d'une particule de masse m située en M s'écrit alors dans ces trois référentiels :

$$\vec{a}(M)_R = \frac{1}{m} \sum \vec{f}, \quad (46)$$

$$\vec{a}(M)_{R_g} = \frac{1}{m} \sum \vec{f} - \vec{a}(T)_R, \quad (47)$$

$$\vec{a}(M)_{R_T} = \frac{1}{m} \sum \vec{f} - \vec{a}(T)_R - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R_T} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{TM}. \quad (48)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de R_T par rapport à R et R_g .

Ces trois relations permettent dans une certaine mesure de scinder le problème du mouvement de la Terre en deux : la première relation permet de déterminer le mouvement du centre de la Terre, la deuxième ou la troisième donne le mouvement de la Terre par rapport à son centre grâce à l'une des deux autres relations⁷. Le premier problème consiste à déterminer le mouvement des astres considérés comme des points et intéresse la mécanique céleste alors que le deuxième permet de résoudre la rotation et les déformations de la Terre et intéresse à la fois les mécaniciens célestes et les géophysiciens. Seul le deuxième nous intéresse dorénavant.

7. En toute rigueur, il faut connaître la solution d'un des deux problèmes pour résoudre l'autre mais l'éloignement et la quasi-sphéricité des astres permettent de s'en affranchir avec un degré assez élevé d'exactitude.

2 La marée, approche descriptive

Une partie de ces notes reprend des articles rédigés avec Étienne Ghys pour le site internet des *Mathématiques pour la Terre - 2013*⁸.

2.1 Une première explication

On se doutait bien que la Lune avait quelque chose à voir avec ça ! C'est le grand Newton qui a proposé la première explication solide, au 17^{ème} siècle. Selon sa loi de l'attraction universelle (souvenez-vous de la pomme), « deux corps s'attirent en raison directe du produit de leurs masses et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare ». Par exemple, la Lune et la Terre s'attirent mutuellement. Imaginez une goutte d'un gramme d'eau à la surface de l'océan terrestre, juste sous la Lune. Cette goutte est plus proche de la Lune que le reste de la Terre ; elle est donc plus attirée par la Lune qu'un gramme de Terre. Le niveau de l'océan a donc tendance à s'élever à l'aplomb de la Lune.

PROPOSITION XXIV. THÉORÈME XIX.

Le flux & le reflux de la mer sont causés par les actions de la Lune & du Soleil.

Par les Cor. 19. & 20. de la Prop. 66. du premier Livre, on voit que la mer doit s'abaisser & s'élever deux fois chaque jour tant solaire que lunaire, & que la plus grande élévation de l'eau dans les mers libres & profondes, doit suivre le passage de l'astre par le méridien du lieu dans un espace de temps moindre que six heures. C'est en effet ce qui arrive dans la mer Atlantique & d'Ethiopie, & dans tout le trajet qui est entre la France & le Cap de bonne Espérance vers l'Orient, ainsi que dans la mer Pacifique sur les rivages du Chili & du Pérou : car

FIGURE 1 – Extrait du texte de Newton, tiré de la seule traduction française de l'ouvrage, par Mme la Marquise du Châtelet, 1759. Newton décrit ici le phénomène de marée et plus loin il donne une méthode pour déterminer les rapports des masses lunaire et solaire à partir des observations de flux et reflux des océans [cf article *Deparis, Planet-Terre*].

Imaginez maintenant une autre goutte d'eau, toujours à la surface de l'océan mais du côté opposé à la Lune. Cette fois la goutte est plus éloignée de notre satellite que le reste de la Terre et elle est donc moins attirée par la Lune. Elle a donc tendance à s'éloigner de la Terre, et le niveau des océans monte également, par rapport à la Terre. Ainsi, l'attraction de la Lune sur l'océan produit deux espèces de renflements, diamétralement opposés. Comme notre Terre fait un tour par jour autour d'elle-même, un point donné du globe voit passer un renflement deux fois par jour soit une marée haute

8. <http://mpt2013.fr/?s=ghys+chambat&submit=Rechercher>

toutes les douze heures (et 25 minutes car il faut tenir compte du fait que la Lune tourne autour de la Terre... mais passons sur ce « détail »). CQFD.

Mais cette explication n'est pas satisfaisante ! Si elle était correcte, la marée devrait être basse à peu près au lever et au coucher de la Lune et haute quand la Lune est haute dans le ciel, ou alors douze heures plus tard, à un moment où on ne la voit pas puisqu'elle est sous nos pieds ! Hélas, les observations les plus élémentaires montrent que ce n'est presque jamais ce qui se passe en réalité ! Faut-il revoir la théorie ? Oui ! les océans ne se soulèvent pas sagement lorsque la Lune est au-dessus d'eux ! Pourquoi ? Et puis si l'attraction lunaire soulève l'eau ne peut-elle soulever aussi la Terre ? Comment calculer cela ?

Ce sont ces notions que nous allons détailler dans les chapitres qui suivent. Nous commencerons par expliquer les forces à l'origine de ces mouvements, puis les mouvements de la Terre solide qui en découlent et enfin les mouvements des océans. Le flux et le reflux de la mer reflète une différence entre les marées océaniques et les marées de la Terre solide et recèle plusieurs niveaux de complexité. Il faut commencer par étudier la *force* de marée puis nous pourrons en venir aux *effets* de cette force.

[Ajouter figure 8 de gauche et figure 10 en indiquant que pour comprendre le modèle réaliste de la fig 8 on va commencer par comprendre le modèle simpliste de la fig 10. Puis donner le plan :

- force de marée
- déformation : ordre de grandeur et profil d'équilibre oblong
- déformation de la Terre solide ; ondes de marées
- marées océaniques.]

2.2 La force de marée

Pour simplifier, nous allons considérer deux astres seulement : un astre attirant, la Lune, un astre attiré, la Terre. Ce sont donc les effets de la force de marée lunaire sur la Terre que nous allons examiner (l'inverse existe aussi et nous donnerons ses conséquences dans un futur chapitre).

Expliquer la force à l'origine des marées n'est pas simple car pour bien faire cela requiert quelques notions de mécanique ; notamment que la loi $\sum \vec{f} = m\vec{a}$ est vraie uniquement dans les référentiels appelés *galiléens*⁹.

Il faut savoir que si la Lune tourne autour de la Terre, la Terre tourne autour de la Lune. Tout dépend bien sûr du référentiel dans lequel on se place. Deux référentiels sont utiles : celui qui est centré au centre de masse du système Terre-Lune (et donc à environ 5000 km du centre de la Terre) et dont les axes sont de directions fixes. Celui-ci est galiléen. Dans ce référentiel les centres de la Terre et de la Lune tournent autour du centre Terre-Lune en gardant ces trois points alignés. Le deuxième référentiel est centré au centre

9. Un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

de la Terre et ses axes sont de directions fixes : dans celui-ci le centre de la Terre est immobile mais il faut ajouter des forces d'inertie aux vraies forces. C'est dans ce deuxième référentiel que les forces de marées sont ressenties.

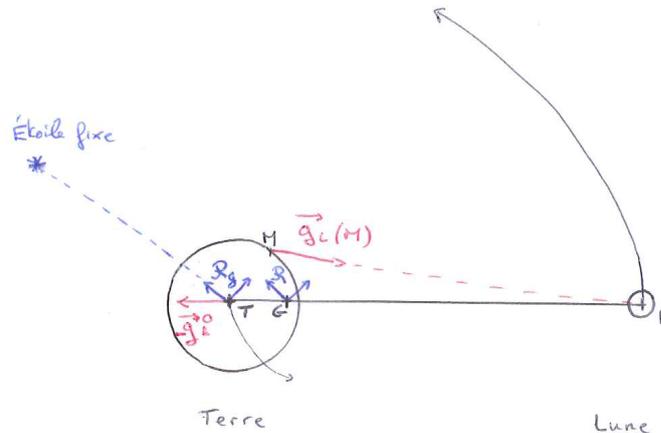


FIGURE 2 – Schéma du système Terre-Lune. La Terre de centre T et la Lune de centre L tournent toutes deux, à la manière d'une haltère, autour de leur centre de masse commun G situé à environ 1000 km de profondeur dans la Terre. Les référentiels, en bleu, sont choisis de telle façon que leurs axes pointent vers des « étoiles fixes » (plus exactement des objets célestes les plus fixes possibles comme les quasars). Le référentiel R centré en G est galiléen alors que le référentiel géocentrique R_g ne l'est pas. Dans ce dernier référentiel tout point subit l'attraction lunaire $\vec{g}_L(M)$ mais aussi une force inertielle apparente $-\vec{g}_L^0$.

D'autre part, il est important de bien réaliser ce qui suit : **l'attraction de la Lune peut être décomposée en deux termes :**

- la moyenne de l'attraction lunaire sur la Terre¹⁰ est la source du mouvement orbital de la Terre (elle tourne autour du centre de masse Terre-Lune) ; ce terme intéresse les mécaniciens célestes.
- les écarts à la moyenne (l'attraction varie dans l'espace en inverse du carré de la distance) génèrent des déformations de la Terre ; ces écarts s'appellent force de marée et intéressent les géophysiciens et géodésiens.

Il y a ainsi une première façon de présenter la force de marée : **la force de marée correspond à l'écart à la moyenne de l'attraction de la Lune c'est-à-dire à l'écart entre attraction de la Lune en un point et l'attraction moyenne sur la Terre**

La deuxième façon de voir la force de marée demande plus de connaissances en mécanique mais elle explique pourquoi on retranche la valeur moyenne de l'attraction lunaire.

La force de marée correspond à l'effet de l'attraction de la Lune vue dans un référentiel géocentrique, c'est-à-dire à l'effet de l'attraction de la Lune en ajoutant la force apparente d'entraînement liée au mouvement orbital de la Terre.

10. La résultante (somme) de l'attraction sur la Terre divisée par sa masse.

Listons les forces ressenties par un observateur situé en un point de la Terre :

- l'attraction de la Terre,
- la force centrifuge liée à la rotation de la Terre autour de l'axe des Pôles,
- la force de Coriolis, s'il est en mouvement,
- l'attraction de la Lune,
- une force d'entraînement uniforme.

Les deux premières constituent ensemble la pesanteur ; les deux dernières la force de marée. Essayons de comprendre ce qu'est la force d'entraînement.

La Terre a tendance à tomber sur la Lune mais puisqu'elle possède une vitesse orbitale elle est en même temps écartée de la Lune, ce qui fait qu'en terme de trajectoire elle ne tombe pas vraiment et décrit une courbe quasi-circulaire¹¹. Puisque la Terre ne tombe pas sur la Lune on peut dire qu'il existe une « force » qui contrebalance l'attraction lunaire. Cette force apparente est, comment on vient de le voir, liée au mouvement : c'est l'opposée de l'accélération de la Terre (multipliée par sa masse).

Mettons cela en équation. Notons \vec{g}_L^0 l'attraction moyenne de la Lune sur la Terre¹², \mathcal{M}_T la masse de la Terre et $\vec{a}(T)$ l'accélération du centre T de la Terre (dans le référentiel galiléen R). Le principe fondamental de la dynamique $\mathcal{M}_T \vec{g}_L^0 = \mathcal{M}_T \vec{a}(T)$ peut aussi s'écrire

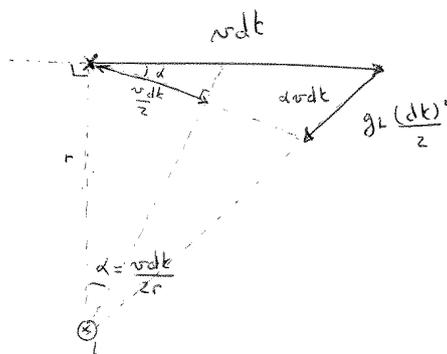
$$\mathcal{M}_T \vec{g}_L^0 - \mathcal{M}_T \vec{a}(T) = 0. \quad (49)$$

On peut donc voir le mouvement comme un équilibre où le terme $-\mathcal{M}_T \vec{a}(T)$ est une force apparente.

Chacun a déjà ressenti cette équivalence entre accélération et force dans une voiture qui prend un virage : l'accélération centripète de la voiture est ressentie comme une force centrifuge par le passager. Chacun des deux points de vue fait référence à un référentiel d'observation : dans un référentiel galiléen la somme des forces est égale au produit de la masse par

11. S'il n'y avait pas l'attraction de la Lune, pendant un temps dt la Terre parcourrait une distance $v dt$ en ligne droite. Avec l'attraction lunaire, pendant ce même laps de temps elle tombe aussi sur la Lune de la distance $g_L (dt)^2 / 2$ (figure). Or on peut calculer cette longueur de chute d'une autre façon : pour des petits angles l'angle de déviation de la trajectoire α est $v dt / 2r$, de plus la trajectoire est quasi circulaire ce qui indique que la longueur de chute est $\alpha v dt = (v dt)^2 / 2r$. C'est ainsi que Newton a montré la relation bien connue $g_L = v^2 / r$ (attraction égale accélération centripète). Et qu'il a découvert ce que raconte l'histoire de la pomme : la Lune tombe vers la Terre suivant les mêmes principes que la pomme.

12. Mathématiquement $\vec{g}_L^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\text{Terre}} \vec{g}_L(M) \rho dV$.



l'accélération alors que dans le référentiel mobile, l'accélération de ce référentiel est perçue comme une force, de sens opposé, qu'on appelle force d'entraînement.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour la Terre globale s'applique en partie à toute particule liée à la Terre. Une masse m située en un point M subit l'attraction de la Lune $m\vec{g}_L(M)$ mais aussi la force d'entraînement $-m\vec{a}(T)$. La somme de ces deux attractions s'appelle *force de marée* :

$$\vec{f}^m(M) := m\vec{g}_L(M) - m\vec{a}(T) = m\vec{g}_L(M) - m\vec{g}_L^0. \quad (50)$$

Par commodité on définit l'*accélération de marée* :

$$\vec{g}_L^m(M) := \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L^0. \quad (51)$$

Décrivons un peu plus l'accélération d'entraînement $-\vec{g}_L^0$. Dans la marée, on ne s'intéresse pas à la rotation de la Terre sur elle-même, celle-ci est contenue dans la *pesanteur*. On cherche donc la force dans un référentiel dont les axes ont des directions fixes ; dans un tel référentiel tous les points ont une même accélération : \vec{g}_L^0 est donc uniforme (ne dépend pas du point M). Ce n'est donc pas, comme on le lit parfois, une force centrifuge (qui n'est pas uniforme), mais une force inertielle de translation non rectiligne.

Si la Terre est sphérique l'attraction moyenne \vec{g}_L^0 est égale à l'attraction au centre de la Terre $\vec{g}_L(T)$. Dans la plupart des livres on confond d'emblée les deux, ce qui est une approximation très satisfaisante. C'est ce que nous ferons désormais.

2.3 Amplitude et direction de la force de marée

L'ordre de grandeur de la force de marée est facile à estimer en faisant la différence des deux forces d'attraction entre le point proche de la Lune et le centre de la Terre :

$$g_L^m = \frac{GM_L}{(d-r)^2} - \frac{GM_L}{d^2} \simeq 2\frac{GM_L}{d^3}r. \quad (52)$$

C'est la différentielle d'une fonction en $1/d^2$, c'est donc une fonction proportionnelle à $1/d^3$.

Pour connaître complètement la force, il nous faut son amplitude et sa direction partout. Par le dessin tout d'abord, les deux forces qui composent la marée se déterminent aisément (figure) : nous voyons que la force de marée a tendance à allonger la Terre dans la direction Terre-Lune, à la comprimer dans le plan perpendiculaire et à créer ainsi deux « bourrelets ».

Mathématiquement ensuite, on peut montrer que l'accélération dérive d'un potentiel ($\vec{g}_L^m(M) = \vec{\text{grad}}\phi^m$) qui a la forme :

$$\phi^m(M) = \frac{GM_L}{d^3}r^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}. \quad (53)$$

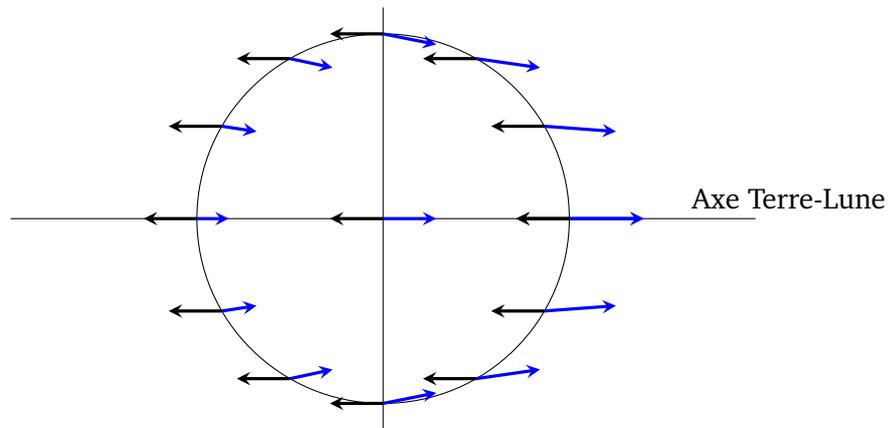


FIGURE 3 – L'accélération d'attraction de la Lune ($\vec{g}_L(M)$, bleu) pointe vers la Lune est d'autant plus grand que le point est proche de la Lune. L'accélération d'inertie de translation est, elle, uniforme ($-\vec{g}_L^0$, noir) et égal en norme à \vec{g}_L au centre de la Terre. Les vecteurs sont représentés en différents points d'un plan contenant l'axe Terre-Lune.

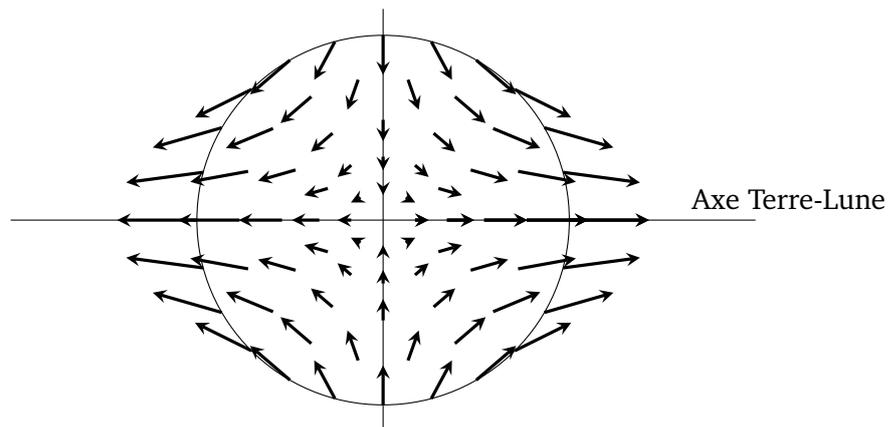


FIGURE 4 – L'accélération de marée $\vec{g}_L^m(M) := \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L^0$ en différents points d'un plan contenant l'axe Terre-Lune est à symétrie de révolution autour de l'axe Terre-Lune et symétrique par rapport au plan perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de la Terre.

où r est la distance de M au centre de la Terre, θ est sa distance zénithale avec la Lune, c'est-à-dire l'angle au centre de la Terre MTM entre la direction de la Lune et celle du point M (cf. fig. 6).

2.4 La déformation de la Terre, un ordre de grandeur

Une fois la force de marée calculée, comment déterminer la déformation de la Terre ? Une première approche est de chercher un ordre de grandeur. Pour cela on suppose la Terre sphérique et on commence par remarquer que la force de marée a la dimension d'une pesanteur. Le problème compte cinq variables : le rayon de la Terre R , la distance Terre-Lune d , le déplacement de la surface au plus haut du bourrelet h_{\max} sous l'effet combinée de la force de marée g_L^m et de la gravité de la Terre sphérique $g_0 = GM_T/R^2$. Ces variables comptent deux dimensions : les distances et la pesanteur. Il y a donc trois nombres sans dimensions indépendants, par exemple h_{\max}/R , R/d et g_L^m/g_0 et l'équation physique qui exprime le lien entre les variables peut s'écrire :

$$\frac{h_{\max}}{R} = \text{fonction} \left(\frac{R}{d}, \frac{g_L^m}{g_0} \right). \quad (54)$$

Cette méthode, dimensionnelle, est formalisée sous le nom de théorème Π ou théorème de Vaschy-Buckingham¹³.

Pour aller plus loin, on peut se placer dans le cadre d'une théorie linéaire de la déformation, élastique ou fluide. Cela exprime le fait que la déformation h_{\max}/R est proportionnelle à la force appliquée g_L^m (d'ailleurs, on ne voit pas en quoi la distance d interviendrait autrement que dans la force de marée). Au final, on a donc *un ordre de grandeur* :

$$h_{\max} \propto \frac{g_L^m}{g_0} R = 2\Gamma_L R \quad (55)$$

où Γ_L est un nombre sans dimension¹⁴ :

$$\Gamma_L := \frac{\mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d} \right)^3. \quad (56)$$

Avec $R = 6\,371$ km, $d = 384\,000$ km, $\mathcal{M}_T = 81,3 \mathcal{M}_L$, on trouve $\Gamma_L = 5,6 \cdot 10^{-8}$ et $h_{\max} = 72$ cm. Avec le même raisonnement pour le Soleil et avec des notations évidentes : $d_S = 23\,500 R$, $\mathcal{M}_S = 333\,000 \mathcal{M}_T$; on trouve alors $\Gamma_S = \frac{\mathcal{M}_S}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d_S} \right)^3 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ c'est-à-dire $h_{\max} = 32$ cm et $\Gamma_L/\Gamma_S = 2,2$. L'influence solaire n'est pas négligeable quoique inférieure à celle de la Lune. Lorsque les trois astres sont alignés (tous les 14,75 jours), les forces de marées lunaires et solaire s'ajoutent, on a alors de grandes marées qu'on appelle *vives-eaux*; quand les astres sont en quadrature, les marées sont faibles, ce sont les *mortes-eaux*.

13. http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Vaschy-Buckingham

14. Mais pas indépendant des deux autres.

Le signe $:=$ signifie que l'égalité est une définition.

2.5 La déformation de la Terre, un profil oblong

Quel est le profil de la Terre déformée ?

Rappelons-nous l'expérience du récipient rempli d'un fluide parfait. Au repos, la surface du fluide est plane et horizontale : elle est perpendiculaire à la pesanteur \vec{g} . Lorsqu'on le fait tourner à vitesse angulaire constante ω autour de son axe (cf. fig 5) et qu'on suppose que le fluide tourne d'un seul bloc, la surface prend une forme parabolique. En effet, la surface est perpendiculaire cette fois à la somme des deux forces, de pesanteur et centrifuge, c'est-à-dire à $\vec{g} + \omega^2(x, y, 0)$. Pour poursuivre le calcul, le physicien dispose alors d'un outil redoutable : le potentiel. En effet, cette force « dérive » d'un potentiel, c'est-à-dire qu'elle s'écrit : $\vec{\text{grad}}(gz + \omega^2(x^2 + y^2)/2)$. Le gradient étant perpendiculaire au potentiel, les surfaces perpendiculaires à la force sont donc des surfaces équipotentielles. La surface libre du liquide a donc pour équation $z = -\omega^2(x^2 + y^2)/2g + \text{cste}$.

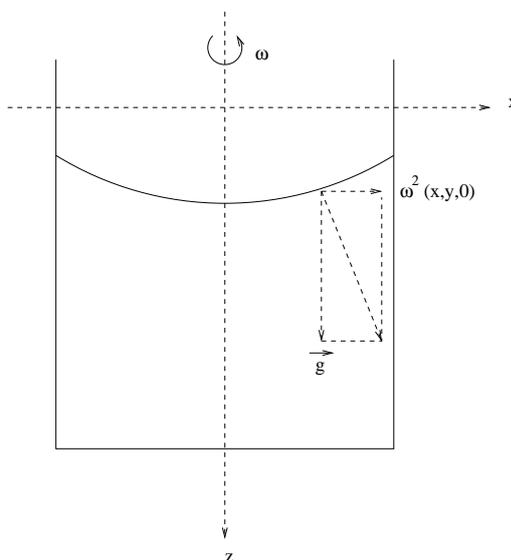


FIGURE 5 – Récipient de liquide tournant autour de son axe à vitesse ω . La forme de la surface est une parabole.

Procédons au même raisonnement pour la surface de la Terre et supposons que la surface est un fluide parfait qui tourne en bloc autour de l'axe des pôles. La surface du fluide est alors celle pour laquelle la somme du potentiel de pesanteur et du potentiel de marée est constante. On trouve que le potentiel de pesanteur aplatit la Terre aux pôles, avec une différence des rayons équatoriaux et polaires de 21 km¹⁵. Le potentiel de marée (eq. 53) allonge, lui, la Terre dans la direction de la Lune mais d'une quantité beaucoup plus petite. On trouve en effet que cet allongement s'exprime par :

15. Plus précisément, l'attraction rend la Terre sphérique, la force centrifuge l'aplatit aux Pôles.

$$h = \frac{\phi^m}{g_0} = h_{\max} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (57)$$

avec h_{\max} le maximum, dans la direction Terre-Lune, qui vaut :

$$h_{\max} = \Gamma_L R. \quad (58)$$

Suivant cette théorie, la Terre fluide se soulève de 36 cm dans la direction de la Lune ($\theta = 0$) et s'abaisse de 18 cm dans le plan perpendiculaire passant par le centre de la Terre ($\theta = \pi/2$). La forme générale est ce que les mathématiciens appellent un ellipsoïde allongé, ou *oblong*, dans la direction de la Lune, une sorte de ballon de rugby en moins pointu (fig. 6).

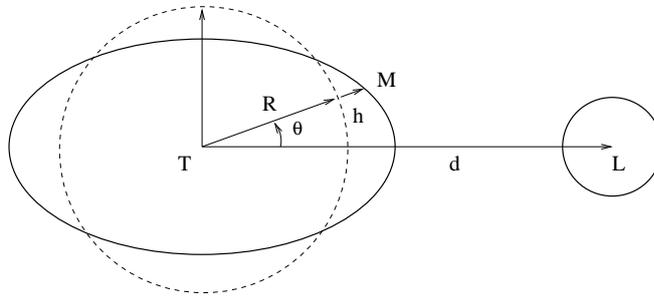


FIGURE 6 – Forme oblong de l'équipotentielle, donnée par l'équation polaire $r = R + h = R + h_{\max} (3 \cos^2 \theta - 1)/2$.

On observe en fait que le déplacement moyen des continents est de l'ordre de 30 cm, alors qu'il est très variable dans les océans, de 0 à 1 mètre en plein océan, et jusqu'à plusieurs mètres sur certaines côtes. De plus, si la déformation des continents prend bien la forme du ballon de rugby, celle des océans est beaucoup plus complexe. La suite nous permettra de comprendre les raisons de ces différences. Pour cela, nous allons commencer par parler des marées de la Terre solide, les plus simples, puis nous en viendrons aux marées océaniques.

2.6 Déformation de la Terre solide

Avant de lire ce texte, vous saviez que les marées océaniques sont des déformations dues aux forces d'attraction de la Lune et du Soleil sur l'eau. Ce que vous ne saviez peut-être pas, c'est qu'il y a aussi des marées sur la Terre solide.

En effet, la force d'attraction de la Lune agit non seulement sur l'eau des océans mais aussi sur toute particule de Terre, qu'elle soit proche de la surface ou plus en profondeur. Dans la direction Terre-Lune cette force tend à éloigner de son centre les particules, alors que dans la direction perpendiculaire elle tend à les rapprocher. Même si cette force agit sur l'ensemble du globe, du centre à la surface, la déformation qui en résulte, appelée *marée terrestre* ou *marée solide*, est beaucoup plus simple à calculer que celle de la

marée océanique. La Terre prend approximativement la forme d'un ballon de rugby et dont une excroissance pointe vers la Lune et l'autre à l'opposé.

Ce bourrelet reste dans la direction Terre-Lune alors que la Terre tourne en un jour. Pour un observateur fixe à la surface de la Terre ce bourrelet se déplace donc et l'observateur monte et descend deux fois par jour. La période exacte est en fait de 12 h 25 min ($\approx 12 \text{ h} \times (1 + 1/28)$) car la Lune se déplace de $1/29$ e de tour autour de la Terre pendant que celle-ci fait une rotation sur elle-même. Ce passage périodique du bourrelet est ce qu'on appelle une onde de marée.

Cette déformation est dite *statique*, car on peut faire le calcul de déformation comme si le mouvement était infiniment lent. Cette hypothèse est valide parce que le forçage de marée se propage beaucoup moins vite que les déformations de la Terre : il parcourt un tour de Terre en 12 h 25 min alors que notre planète peut osciller naturellement (le physicien parle d'*oscillation libre*) comme un ballon de rugby avec une période de 50 min¹⁶.

Pour connaître l'ampleur de la déformation plus précisément que par un argument dimensionnel nous avons deux solutions : le calcul et l'observation.

Pour effectuer le calcul, on écrit les équations de l'équilibre élastique pour une Terre quasi-sphérique soumise à la force de marée. On vient en effet de voir que l'on peut calculer les déformations de la Terre solide en ne tenant pas compte de l'accélération. Obtenir la solution est un peu calculatoire et demande quelques connaissances en mécanique et en mathématiques. Avec la force donnée en eq. (53), on trouve que la topographie créée par cette marée est de la forme :

$$h = h_{\max} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (59)$$

avec h_{\max} le maximum, dans la direction Terre-Lune, qui vaut :

$$h_{\max} = h_2 \Gamma_L R. \quad (60)$$

C'est quasiment la même expression que précédemment (eq. 58) avec, au lieu du facteur 1, un coefficient h_2 que l'on appelle *nombre de Love* et qui dépend des paramètres élastiques de la Terre. Ceux-ci ont connus grâce à la sismologie et indiquent que¹⁷ $h_2 \approx 0,62$, soit $h_{\max} = 22$ cm pour la Lune et 10 cm pour le Soleil.

Les observations confirment-elles cette théorie ? Remarquons tout d'abord que la force d'attraction lunaire a plusieurs effets sur un instrument situé en surface terrestre. Elle exerce une force sur l'instrument et modifie donc directement la pesanteur. En déformant la Terre, elle soulève ou abaisse l'instrument par rapport au centre de la Terre et elle modifie l'attraction de la

16. Une autre comparaison numérique, un peu moins rigoureuse car ne déformant pas la Terre en ballon de rugby, est donnée par la vitesse de propagation, de 4 km/s, des ondes sismiques de surface ; elles font un tour de Terre en 2 h 30 min environ.

17. http://en.wikipedia.org/wiki/Love_number

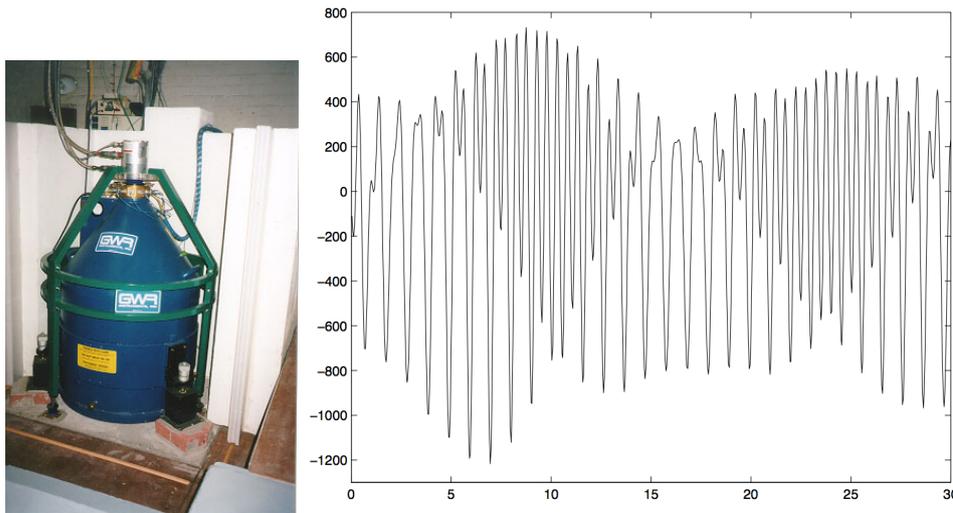


FIGURE 7 – Gauche : gravimètre supraconducteur de l'observatoire géophysique de Strasbourg enregistrant la pesanteur au cours du temps. Droite : Variation de pesanteur à Strasbourg (ordonnées, unités arbitraires) au cours du temps (abscisse, en heures) enregistrées par le gravimètre supraconducteur : sont bien visibles les périodes diurne et semi-diurne modulées par une période semi-mensuelle.

Terre elle-même. Ainsi, la force de marée modifie l'intensité de la pesanteur, sa direction et la position de l'instrument. Ces quantités peuvent être mesurées respectivement avec un gravimètre (schématiquement une masse au bout d'un ressort, cf fig. 7), un inclinomètre (un fil à plomb par rapport aux étoiles) et un système de positionnement (par exemple le GPS).

Les calculs et les observations disent la même chose : à la surface de la Terre chacun de nous monte et descend deux fois par jour de 22 cm en moyenne par rapport au centre de notre planète. Les humains ne le sentent ni ne le voient car ce phénomène se produit lentement et à grande échelle.

On peut faire le même calcul avec les océans, en supposant leur déformation statique, ce qui comme nous le verrons plus loin est faux ! Mais cela nous donnera un ordre de grandeur. Récapitulons alors ce qu'on trouve pour la marée Lunaire ¹⁸ :

Hypothèses	$h_{\max}/\Gamma_L R$	h_{\max}
Solide non déformable	0	0
Analyse dimensionnelle	2	72 cm
Équipotentielle (fluide parfait non gravitant)	1	36 cm
Fluide parfait auto-gravitant, homogène	5/2	90 cm
Fluide parfait auto-gravitant, hétérogène	1,94	69 cm
Elastique gravitant hétérogène	0,62	22 cm

Dans la troisième ligne du tableau on considère que la Terre est fluide à l'équilibre statique. Dans la suivante on prend en compte le fait que la Terre

18. Pour la marée solaire il suffit de diviser ces nombres par 2,2.

se déformant, son propre potentiel de gravité change ; cette perturbation du potentiel se rajoute au potentiel lunaire, le coefficient 5/2 est obtenu en considérant que toute la Terre homogène se déforme. Le coefficient 1,9 de la ligne suivante est obtenu en considérant que l'océan homogène se déforme au dessus d'une Terre d'une autre densité. La dernière ligne correspond à un modèle de déformation élastique. Ces calculs sont effectués dans l'hypothèse statique, seule la dernière ligne correspond donc à la réalité.

2.7 Notion d'ondes de marées

En un point fixe de la surface terrestre la distance zénithale d'un astre varie. Celle de la Lune varie avec une période de 12 h 25 min. Cela est vrai si on suppose qu'elle orbite dans le plan de l'équateur. Or, l'équateur terrestre est incliné de 23 degrés sur l'Écliptique et l'orbite lunaire est-elle même inclinée de 5 degrés sur l'Écliptique ; ainsi le mouvement lunaire dans le ciel se décompose en une sinusoïde de période 12 h 25 min mais aussi une autre de période 24 h 50 min. De plus l'orbite lunaire n'est pas circulaire uniforme, l'orbite de la Terre autour du Soleil non plus.

Il en résulte que le potentiel de marée luni-solaire est en fait une somme de sinusoïdes dont les amplitudes A_n , pulsations ω_n et phases α_n , sont connues :

$$\phi^m(\vec{x}) = \sum_n A_n(\vec{x}) \cos(\omega_n t - \alpha_n(\vec{x})). \quad (61)$$

On appelle *onde de marée* chacun des termes de cette série. Les ondes principales sont les ondes diurnes (Soleil 24 h, Lune 24 h 50) et semi-diurnes (Soleil 12 h, Lune 12 h 25). On sait que la somme de sinusoïdes proches peut être vue comme une modulation de fréquence¹⁹. La somme des ces quatre ondes peut donc être vue comme ce que nous avons déjà identifiées fig. 7 : les périodes diurne et semi-diurne modulées par une période semi-mensuelle.

2.8 Déformation des océans

2.8.1 Un phénomène dynamique

Nous avons insinué précédemment que la force d'attraction lunaire provoque deux renflements diamétralement opposés dans l'océan de 69 cm de hauteur. Si on s'en tenait là, on pourrait affirmer que la marée basse se produit à peu près au même moment dans deux ports situés sur le même méridien. Or, c'est loin d'être le cas.

C'est Laplace, au 19ème siècle, qui a compris pourquoi le phénomène est plus complexe. La théorie de Newton était statique : elle faisait comme

19. Du fait de $\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t/2) \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2)$.

si l'océan se soulevait ou s'abaissait gentiment, en réponse aux forces d'attraction. Pour la Terre solide nous avons vu que cela est réaliste, ses déformations sont statiques, mais pour les océans Laplace nous explique qu'il faut penser aux marées comme un phénomène dynamique.

Imaginez par la pensée une Terre immobile entourée par un océan, sans aucun continent, sans Lune et sans Soleil. Soulevez (toujours par la pensée !) une partie de l'océan et lâchez tout à coup. Que se passe-t-il ? Eh bien, vous allez engendrer une immense vague, un tsunami, qui va se déplacer autour de la Terre. L'océan entre alors dans une sorte d'oscillation, qui sera probablement amortie par les frottements internes et finira par se calmer.

Maintenant, ajoutez la Lune (et le Soleil !). En un lieu donné sur la Terre, on peut penser aux forces d'attraction de Newton comme une espèce de pulsation, comme si toutes les 12 heures et 25 minutes, un géant soulevait l'océan. C'est l'interaction entre cette pulsation lunaire et les oscillations naturelles de l'océan qui crée les marées : c'est un phénomène dynamique.

Pensez à ces passerelles qui se mettent à osciller dangereusement lorsqu'on les traverse en cadence. Il s'agit du phénomène de résonance bien connu des physiciens. Les oscillations de l'océan, même sans forces d'attraction, sont extrêmement difficiles à décrire pour deux autres raisons encore : elles dépendent de la profondeur mais aussi de la géométrie des côtes. Les forces newtoniennes sont faciles à comprendre. En revanche, le phénomène qui en résulte est complexe et pour le décrire, il nous faut tout à la fois utiliser des théories abstraites de l'analyse des équations aux dérivées partielles, des méthodes numériques subtiles, mais aussi les observations des marégraphes.

2.8.2 Première conséquence ; l'océan fictif global

Pour comprendre la complexité de la dynamique océanique commençons par supposer que l'océan est de profondeur constante et recouvre la Terre entière. Cette hypothèse faite, ouvrez n'importe quelle encyclopédie, cherchez sur Internet, ouvrez n'importe quel manuel scolaire, cherchez une image illustrant le phénomène des marées. Invariablement, vous trouverez quelque chose comme la figure 8 de gauche. Cette figure est fautive ! Le bourrelet est mal placé et devrait être orienté comme sur la figure de droite.

La marée serait basse sous la Lune ? Alors qu'elle devrait être haute puisque c'est là que l'attraction de la Lune est la plus forte. Comment est-ce possible ? C'est parce que la réponse de l'océan est *dynamique* et non statique.

Explication. Observez un pendule qui oscille périodiquement (fig. 9). Si sa longueur est d'un mètre, la période d'oscillation est d'environ deux secondes : c'est ce qu'on appelle la période d'oscillation propre. Maintenant, prenez le pendule dans la main et faites-lui subir une petite oscillation horizontale un peu plus lentement qu'une fois toutes les deux secondes. Le pen-

21. D'après une figure de Tadashi Tokieda dans (Souhay et al, 2013).

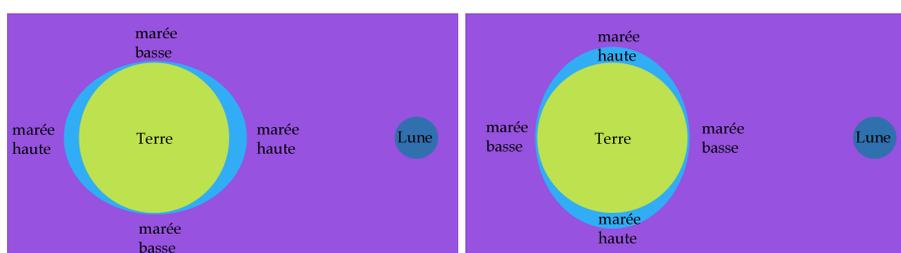


FIGURE 8 – Gauche : marée statique. Droite : marée dynamique. Figure Etienne Ghys

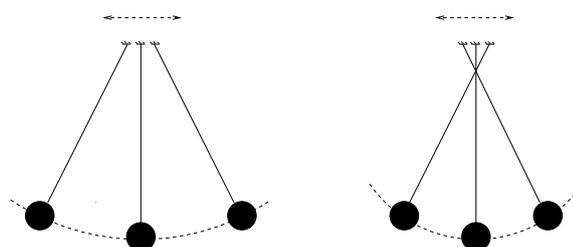


FIGURE 9 – A gauche : le point de suspension oscille lentement, l'oscillation du pendule et le forçage sont en phase. A droite : le point de suspension oscille rapidement, l'oscillation et le forçage sont déphasés²¹.

dule oscille avec la période forcée que vous lui imposez, et le mouvement de votre main et du pendule sont en phase, dans le même sens en quelque sorte. Si, en revanche, votre main oscille plus vite qu'une fois toutes les deux secondes, les deux mouvements sont inversés, en opposition de phase.

Pour la marée, c'est ce qui se passe. Si on laisse l'océan osciller, la période propre est de l'ordre de 23 heures²². Or les forces de marées sont les plus fortes sous la Lune et du côté opposé à la Lune. La période de l'oscillation forcée est donc de l'ordre de 12 heures 25 min, le temps pour la Terre de faire un demi-tour. Comme 23 est plus grand que 12, l'océan répond moins rapidement que la force qui le sollicite, il se met en opposition de phase avec la Lune. La figure 1 est fautive et c'est la figure 2 qui est bonne !

Ce serait en tous cas ce qui se passerait s'il n'y avait pas de continents et si la profondeur des océans était constante égale à 4 km. Pour une profon-

22. Pour un océan global de profondeur constante $H = 4$ km la période est donnée par $2\pi R/\sqrt{6gH} = 22,7$ h. Cette relation a été trouvée par D'Alembert en 1747; cf Deparis *et al.*, 2013. Une ordre de grandeur de cette valeur peut être trouvé de la façon suivante. Une vague de grande échelle voyage à la vitesse $v = \sqrt{gH} = 200$ m/s = 700 km/h et met donc $2\pi R/\sqrt{gH} = 55$ h pour faire un tour de Terre.

Dans la partie solide, nous avons fait remarquer que les ondes sismiques voyagent beaucoup plus vite, 4000 m/s. La vitesse de la trace de la Lune à la surface de la Terre est située entre les deux : 40000 km/12 h 25 min = 890 m/s. La partie solide du globe réagit beaucoup plus rapidement aux sollicitations extérieures que la masse liquide des océans. La partie solide est en phase avec la Lune, la partie liquide si elle couvrait tout le globe serait elle en quadrature.

leur supérieure à 20 km, ce serait la figure de gauche qui serait bonne car l'oscillation propre serait plus rapide ! Nous devons ces observations à Laplace, en 1799. Il comprit que la marée est une oscillation forcée de l'océan.

En science, les figures fausses ont parfois la vie dure²³.

2.8.3 Les vrais océans

Tout se complique avec les vrais océans ! Ils sont de profondeur variable et sont surtout bornés par les côtes : cela complique grandement les déformations de marées.

Ces déformations se décomposent en modes dont les périodes demeurent à peu près simple : en pratique on peut dire qu'elles sont majoritairement diurne, semi-diurne ou mixte suivant la position où l'on se trouve. Par contre, la forme de ces modes est bien plus complexe : certains points ne bougent pas alors que d'autres ont un mouvement important, certains points montent alors que d'autres, même situés sur un méridien commun, descendent (fig. 10). Ce mouvement complexe de l'océan est connue de façon complémentaire par la modélisation et par l'observation.

Décrire tout cela en détail demanderait plus de temps. Nous le gardons pour de futurs articles dans lesquels nous évoquerons également les observations des marées, les calculs théoriques, les marées dans le Système solaire et le reste de l'Univers, l'histoire des marées etc. Il y a encore beaucoup de choses à dire !

Bibliographie

- Agnew, D. C., 2007, Earth Tides. In *Treatise on Geophysics*, vol. 3. *Geodesy*, Elsevier.
- Coulomb, J., et Jobert, G. (Ed.), 1973, *Traité de géophysique interne*, t. 1., *Sismologie et Pesanteur*, Masson.
- Deparis V., Legros H., Souchay J., 2013, Investigations of Tides from the Antiquity to Laplace. In Souchay *et al.*, 2013.
- Roulet, G., Les marées, cours pdf, 2012.
- Souchay, J., Mathis, S., Tokieda, T. (Ed.), 2013, *Tides in Astronomy and Astrophysics*, Springer.
- Simon, B., Lemaître, A., Souchay, J., 2013, *Oceanic Tides* in Souchay *et al.*, 2013, Springer.
- Thual, O., Seiches et marées, cours pdf, 2013.
- Vancamp, M., Thèse pdf, <http://homepage.oma.be/mvc/>, 2014.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Thomas_Doodson#Doodson_Numbers
- <http://www.ifremer.fr/lpo/cours/maree/>

23. Par contre, comme nous l'avons vu précédemment, la marée solide (celle des continents) est haute sous la Lune.

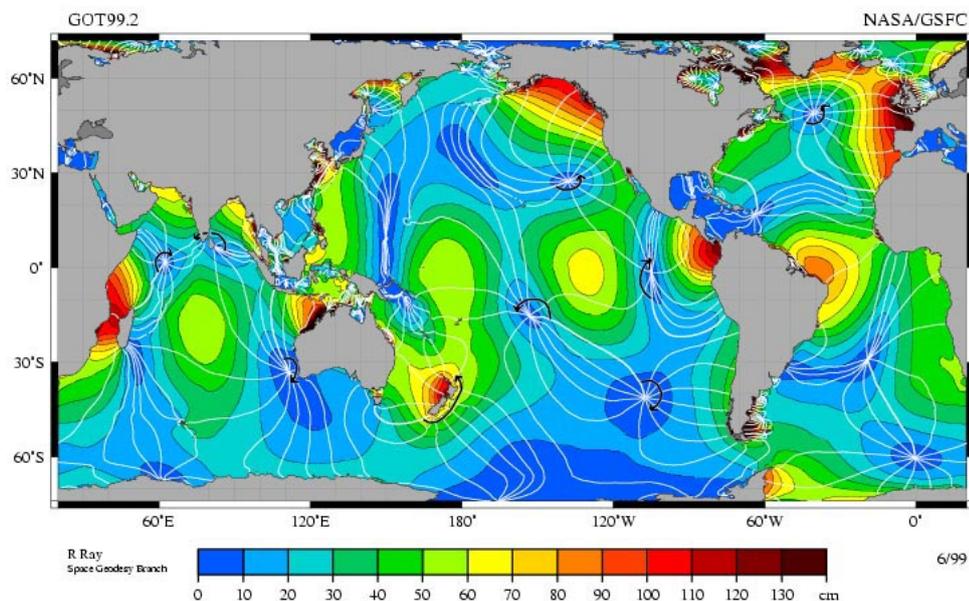


FIGURE 10 – Marée semi-dirune M2. L'amplitude est indiquée par les couleurs ; les lignes blanches sont les lignes cotidales indexées toutes les heures, c'est-à-dire les lignes qui vibrent en phase. Les points où l'amplitude est nulle et les lignes cotidales se rejoignent sont appelés points amphidromiques. Les arcs autour de ces points indiquent le sens de propagation (sens horaire dans l'hémisphère Sud et anti-horaire dans le Nord). Source : NASA - Goddard Space Flight Center et Jet Propulsion Laboratory. <http://en.wikipedia.org/wiki/Tide>.

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Marée>

DeParis, <http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/determination-masse-Lune.xml>

<http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/determination-masse-Lune.xml>

3 La marée en calcul

3.1 Les forces de marées

Considérons toujours que le système Terre-Lune est isolé et que les seules forces sont celles d'attraction de la Terre et de la Lune. Le référentiel R centré au centre de masse du système Terre-Lune peut être considéré comme galiléen. Le Soleil et les autres planètes pourront être ajoutées suivant le même procédé. Notons $m\vec{g}_T(M)$ et $m\vec{g}_L(M)$ ces deux forces sur le point M . La masse m se simplifie alors et le *pdf* devient :

$$\vec{a}(M)_R = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M), \quad (62)$$

$$\vec{a}(M)_{R_g} = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M) - \vec{a}(T)_R, \quad (63)$$

$$\vec{a}(M)_{R_T} = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M) - \vec{a}(T)_R - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R_T} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{TM}. \quad (64)$$

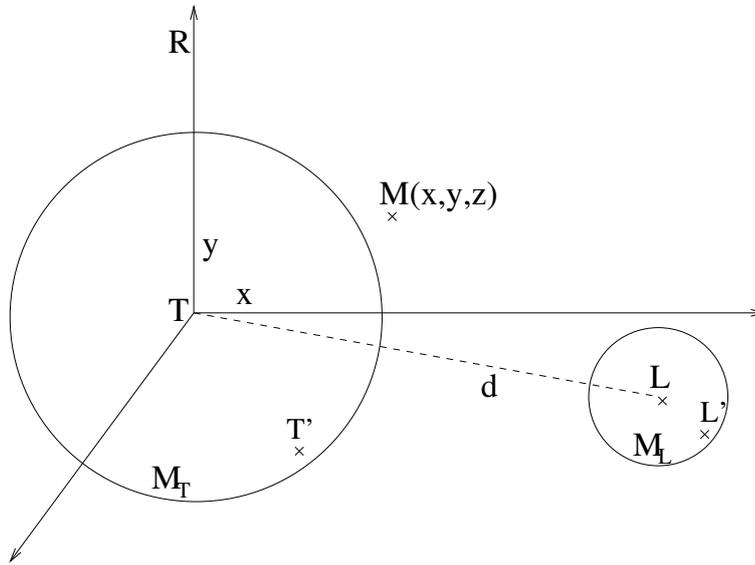


FIGURE 11 – Terre et Lune.

Un résultat que nous avons établi permet de connaître l'accélération $\vec{a}(T)_R$ du centre de masse ; elle est, en effet, donnée par la résultante des forces externes (eq. 18) :

$$\mathcal{M}_T \vec{a}(T)_R = \int_T \rho(T') \vec{g}_L(T') dV, \quad (65)$$

où $\rho(T')$ désigne la densité de la Terre au point courant T' de la Terre \mathcal{T} et \mathcal{M}_T sa masse. Notons alors :

$$\vec{g}_L^0 := \frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\mathcal{T}} \rho(T') \vec{g}_L(T') dV \quad (66)$$

l'attraction que l'on peut qualifier de *moyenne* et qui est un vecteur indépendant de la position. L'accélération de T s'écrit donc

$$\vec{a}(T)_R = \vec{g}_L^0. \quad (67)$$

Définitions

On appelle *accélération de marée*²⁴ l'accélération totale due à l'attraction d'un astre (ici la Lune) :

$$\vec{g}_L^m(M) := \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L^0. \quad (68)$$

On appelle *potentiel* de marée le champ ϕ^m nul à l'infini tel que :

$$\vec{g}_L^m(M) := \vec{\text{grad}}\phi^m(M). \quad (69)$$

On appelle *pesanteur* la somme de l'attraction et de l'accélération centrifuge :

$$\vec{\gamma}_T(M) := \vec{g}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}) \quad (70)$$

Avec ces notations, le *pdf* s'écrit alors dans les deux référentiels non galiléens :

$$\vec{a}(M)_{R_g} = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_L^m(M) \quad (71)$$

$$\vec{a}(M)_{R_T} = \vec{\gamma}_T(M) + \vec{g}_L^m(M) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R_T} - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{TM}. \quad (72)$$

Remarques : la force de marée n'est donc autre chose que l'attraction d'un astre vue dans le repère non galiléen centré au centre de la Terre. Elle prend une forme *différentielle* entre l'attraction de l'astre au point et l'attraction *moyenne* sur la Terre. Parfois, on inclut aussi les forces de marée dans la définition de la pesanteur.

3.2 Hypothèse de la Terre sphérique

Propriété

Lorsque la Terre est supposée à symétrie sphérique, \vec{g}_L^0 est égale à l'attraction lunaire au centre de la Terre : $\vec{g}_L^0 = \vec{g}_L(T)$.

24. Nous l'appellerons aussi par abus de langage *force de marée*.

Dém : la preuve se fait en inversant les intégrales sur la Lune et la Terre. Désignons par L' un point courant de la Lune

$$\vec{g}_L^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\mathcal{T}} \rho(T') \vec{g}_L(T') dV = \frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\mathcal{T}} \rho(T') \int_{\mathcal{L}} \rho(L') G \frac{\overrightarrow{T'L'}}{T'L'^3} dV dV \quad (73)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\mathcal{L}} \rho(L') \int_{\mathcal{T}} \rho(T') G \frac{\overrightarrow{T'L'}}{T'L'^3} dV dV = -\frac{1}{\mathcal{M}_T} \int_{\mathcal{L}} \rho(L') \vec{g}_T(L') dV. \quad (74)$$

Cette relation était d'ailleurs presque triviale puisqu'elle s'écrit aussi

$$\int_{\mathcal{T}} \rho(T') \vec{g}_L(T') dV + \int_{\mathcal{L}} \rho(L') \vec{g}_T(L') dV = 0 \quad (75)$$

et exprime ainsi la loi d'action-réaction des systèmes Lune et Terre. Si la Terre est sphérique $\vec{g}_T(L')$ s'écrit $-G\mathcal{M}_T \frac{\overrightarrow{TL'}}{TL'^3}$ donc :

$$\vec{g}_L^0 = G \int_{\mathcal{L}} \rho(L') \frac{\overrightarrow{TL'}}{TL'^3} dV, \quad (76)$$

ce qui est exactement $\vec{g}_L(T)$.

Remarque : dans la plupart des livres, on définit la force de marée par la différence de l'attraction lunaire au point considéré avec l'attraction au centre de la Terre. On confond ainsi implicitement \vec{g}_L^0 avec $\vec{g}_L(T)$. On voit que cela n'est rigoureusement vrai que si la Terre est sphérique. Heureusement, cela constitue une très bonne approximation. Et, de toute façon, la différence est uniforme (et ne génère donc aucune déformation).

Si ce terme $\vec{g}_L^0 = \vec{a}(T)_R$ ne peut pas être connu en faisant $M = T$ dans la relation (62), c'est parce que cette relation n'est valable que si le point ne subit pas d'autres forces et notamment pas de forces de surfaces. Dans le cas contraire où le point est entouré d'un milieu continu agissant par contact sur lui, il faut ajouter aux forces le terme $\rho^{-1} \text{div} \sigma$ où ρ et σ représentent la masse volumique et le tenseur des contraintes. C'est exactement ce qui se passe pour le centre de la Terre.

[Quelle est l'ordre de grandeur des termes négligés en faisant l'hypothèse de Terre sphérique ? Et de Lune sphérique ?]

Lune sphérique

Dans le cas où la Lune est également supposée sphérique, l'accélération

et le potentiel de marée prennent les formes simples²⁵ :

$$\vec{g}_L^m(M) = G\mathcal{M}_L \left(\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3} \right), \quad (78)$$

$$\phi^m(M) = G\mathcal{M}_L \left(\frac{1}{ML} + \frac{\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{TL}}{TL^3} \right) \quad (79)$$

car $\vec{\text{grad}}_M(1/ML) = \overrightarrow{ML}/ML^3$ et $\vec{\text{grad}}_M(\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{TL}) = -\overrightarrow{TL}$. Développons la première expression²⁶ dans le cas où l'astre perturbateur est éloigné ($TM \ll TL$). Pour simplifier, notons

$$\vec{d} := \overrightarrow{TL} \quad d := \|\vec{d}\| \quad \vec{x} := \overrightarrow{TM} \quad (80)$$

et décomposons $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{TL} - \overrightarrow{TM} = \vec{d} - \vec{x}$. On obtient

$$ML^{-3} = \left((\vec{d} - \vec{x}) \cdot (\vec{d} - \vec{x}) \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \left(d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{x} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (81)$$

$$= d^{-3} \left(1 - 2\frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{d} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq d^{-3} \left(1 + 3\frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{d} \right) \quad (82)$$

si bien que

$$\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3} = \frac{1}{d^3} (\vec{d} - \vec{x}) \left(1 + 3\frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{d} \right) - \frac{\vec{d}}{d^3} \simeq \frac{1}{d^3} \left(3\frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{d} \vec{d} - \vec{x} \right) \quad (83)$$

En notant $\vec{u} = \vec{d}/d$ le vecteur unitaire Terre-Lune, cela s'écrit :

$$\vec{g}_L^m(\vec{x}) = \frac{G\mathcal{M}_L}{d^3} (3(\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{x}). \quad (84)$$

On aurait pu aussi ne pas introduire ces notations et obtenir :

$$\vec{g}_L^m(\vec{x}) = \frac{G\mathcal{M}_L}{TL^3} \left(3\frac{\overrightarrow{TL} \cdot \overrightarrow{TM}}{TL^2} \overrightarrow{TL} - \overrightarrow{TM} \right). \quad (85)$$

Exprimons cette force dans un repère cartésien, noté dans cette partie $Oxyz$, dont l'axe Ox est dans la direction Terre-Lune. A noter ici qu'il faut ne pas

²⁵. Le choix de la constante d'intégration étant arbitraire, on voit aussi que ce potentiel s'écrit

$$\phi^m(M) = G\mathcal{M}_L \left(\frac{1}{ML} + \frac{\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{TL}}{TL^3} - \frac{1}{TL} \right) \quad (77)$$

afin qu'il soit nul au centre de la Terre. Cf. p.ex. cours de Thual.

²⁶. On peut aussi le faire pour le potentiel mais cela nécessite de faire des développements au second ordre. Pour obtenir l'expression approchée de ϕ^m , il est plus simple d'intégrer l'expression de l'accélération (eqs 86-87).

confondre *référentiels* et *repères*. Le référentiel est le système d'axe dans lequel on traite la dynamique : l'accélération est celle qui a lieu dans le référentiel géocentrique d'axes de directions fixes. Le *repère* est constitué par un triplet de vecteurs unitaires sur lesquels on projette un vecteur pour déterminer ses composantes dans ce repère : nous exprimerons les composantes cartésiennes de l'accélération dans le repère $Oxyz$ (tournant par rapport au référentiel géocentrique). Avec ces notations :

$$\vec{g}_L^m(\vec{x}) = \frac{GM_L}{d^3} \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (86)$$

ce qui est bien de la forme $\vec{g}_L^m = \text{grad}\phi^m$ avec ϕ^m le potentiel de marée :

$$\phi^m(\vec{x}) = \frac{GM_L}{2d^3} (2x^2 - y^2 - z^2). \quad (87)$$

En coordonnées sphériques (θ est la *distance zénithale* de la Lune) :

$$\phi^m = \frac{GM_L}{2d^3} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (88)$$

$$\vec{g}_L^m(\vec{x}) = \frac{GM_L}{2d^3} r ((3 \cos 2\theta + 1) \vec{e}_r - 3 \sin 2\theta \vec{e}_\theta), \quad (89)$$

ou, en notant $g_0 = \frac{GM_T}{R^2}$ l'attraction moyenne de la Terre :

$$\phi^m = g_0 \frac{\mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d}\right)^3 \frac{r^2}{2R} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (90)$$

$$\vec{g}_L^m(\vec{x}) = g_0 \frac{\mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d}\right)^3 \frac{r}{2R} ((3 \cos 2\theta + 1) \vec{e}_r - 3 \sin 2\theta \vec{e}_\theta). \quad (91)$$

[La partie radiale ne déforme pas la Terre !]

La norme vaut :

$$\|\vec{g}_L^m(\vec{x})\| = g_0 \frac{\mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d}\right)^3 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{5 + 3 \cos 2\theta}{2}}. \quad (92)$$

Je représente en fig. 12 la partie tangente, en $3 \sin 2\theta \vec{e}_\theta$.

Terre + Soleil.

Avec le Soleil en plus il suffit d'ajouter la force de marée solaire.

Un collègue m'a un jour fait part d'un problème quand on ajoute le Soleil à la Lune : la force inertielle à soustraire est-elle l'attraction du Soleil au centre de masse G_2 du système Terre-Lune ou l'attraction au centre T de la Terre ? La réponse ne m'a pas paru triviale. Mais après réflexion elle est sans ambiguïté. Notons $\vec{a}(T/G_3)$ l'accélération de T dans le référentiel centré au centre de masse Soleil-Terre-Lune G_3 . L'accélération à enlever est

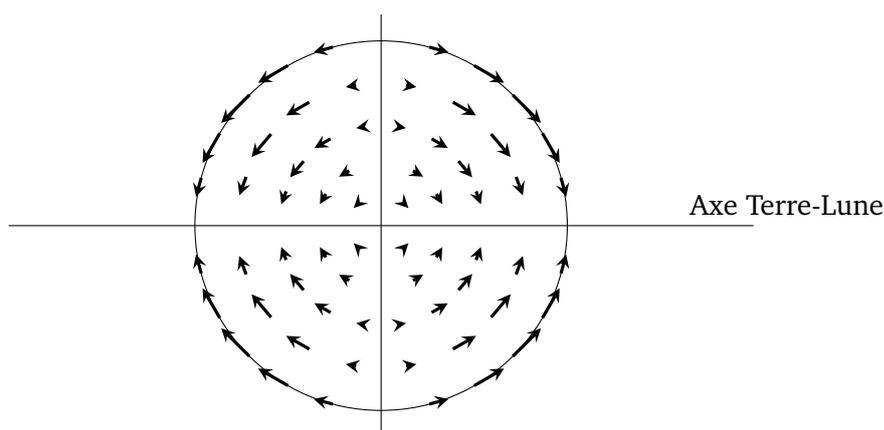


FIGURE 12 – L'accélération de marée $\vec{g}_L^m(M) := \vec{g}_L(M) - \vec{g}_L^0$ en différents points d'un plan contenant l'axe Terre-Lune est à symétrie de révolution autour de l'axe Terre-Lune et symétrique par rapport au plan perpendiculaire à cet axe et passant par le centre de la Terre.

$\vec{a}(T/G_3) = \vec{a}(T/G_2) + \vec{a}(G_2/G_3)$. On pourrait avoir l'impression que le premier terme est bien celui habituel d'attraction de la Lune sur la Terre \vec{g}_L^0 et que le second est l'attraction du Soleil sur la Terre et la Lune. Cette dernière serait donc en trop. La contradiction apparente vient du fait qu'avec le Soleil le point G_2 n'est pas en translation rectiligne uniforme et donc que $\vec{a}(T/G_2)$ n'est pas égal à l'attraction de la Lune sur la Terre. Le bon raisonnement est celui dans le référentiel centré en G_3 : $\vec{a}(T/G_3)$ est égal la résultante des forces d'attraction du Soleil et de la Lune sur la Terre soit $\vec{g}_S^0 + \vec{g}_L^0$; on peut donc bien ajouter les forces de marées séparément en considérant les forces inertielles comme étant les attractions au centre de la Terre.

3.3 La marée du baccalauréat. Déformation statique fluide

Le vecteur précédant pointe vers le centre dans le plan perpendiculaire à la direction Terre-Lune et vers l'extérieur dans cette direction (cf. figure 13). La Terre se déforme donc en s'allongeant dans la direction Terre-Lune. Cette déformation est symétrique et un « bourrelet » est créé vers la Lune ainsi qu'à l'opposé. Les termes décroissent en $R/d \approx 1/60$, donc l'approximation est bonne à quelques % près.

Déterminons maintenant la différence de hauteur h de l'équipotentielle liée à l'ajout du potentiel de marée au potentiel propre de la Terre. Soit r la distance au centre d'un point de l'équipotentielle de la Terre sans forces de marées, alors l'équipotentielle de même valeur après ajout du potentiel de

marée se trouve au point $r + h$ tel que²⁷ :

$$\frac{GM_T}{r} = \frac{GM_T}{r+h} + \phi^m, \quad (93)$$

soit, au premier ordre en $h/r \ll 1$ et après simplification :

$$\frac{GM_T}{r^2} \frac{h}{r} = \phi^m, \quad (94)$$

c'est-à-dire,²⁸ :

$$h = \frac{\phi^m}{g_0}, \quad (96)$$

soit

$$h = \Gamma_L R \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (97)$$

avec

$$\Gamma_L := \frac{\mathcal{M}_L}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d} \right)^3. \quad (98)$$

h est à symétrie de révolution autour de l'axe Terre-Lune. C'est une déformation proche d'un ellipsoïde allongé dans la direction Terre-Lune (cf figure 14). Avec $R = 6\,371$ km, $d = 384\,000$ km, $\mathcal{M}_T = 81,3 \mathcal{M}_L$, on trouve $\Gamma_L = 5,6 \cdot 10^{-8}$. On peut poursuivre exactement le même raisonnement avec le Soleil. Avec des notations évidentes : $d_S = 23\,500 R$, $\mathcal{M}_S = 333\,000 \mathcal{M}_T$; on trouve alors $\Gamma_S = \frac{\mathcal{M}_S}{\mathcal{M}_T} \left(\frac{R}{d_S} \right)^3 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ c'est-à-dire $\Gamma_L/\Gamma_S = 2,2$. L'influence solaire n'est donc pas négligeable quoique inférieure à celle de la Lune. h est maximal dans la direction Terre-Lune, où :

$h_{\max}(\text{Lune}) = 36$ cm, $h_{\max}(\text{Soleil}) = 16$ cm.

Nous avons calculé la marée dite *d'équilibre*²⁹. On observe en fait que le déplacement moyen en plein océan est de l'ordre de 1 mètre et celui des continents de 30 cm. Il aurait fallu prendre en compte le fait que la Terre se déformant, son propre potentiel de gravité change ; cette perturbation (de W) se rajoute donc à W et l'augmente d'environ 90% dans le cas fluide. Sur les continents il faut utiliser un modèle élastique et non fluide. De plus, nous avons calculé ici la marée statique, la partie dynamique est en fait importante dans l'océan. C'est elle qui donne lieu aux grandes inégalités observées près des côtes.

27. Cette relation suppose que le potentiel de la Terre n'est pas modifié par la déformation. Cela revient aussi à supposer que localement le potentiel s'écrit $g_0 z$.

28. On aurait pu traiter le cas général en écrivant le potentiel de pesanteur général W de la Terre au lieu de GM_T/r . En développant W au premier ordre en h on aurait alors fait apparaître $\gamma = \|\vec{\text{grad}}W\|$ et on aurait trouvé

$$h = \frac{\phi^m}{\gamma}. \quad (95)$$

29. Que Poincaré appelait « la marée du baccalauréat ».

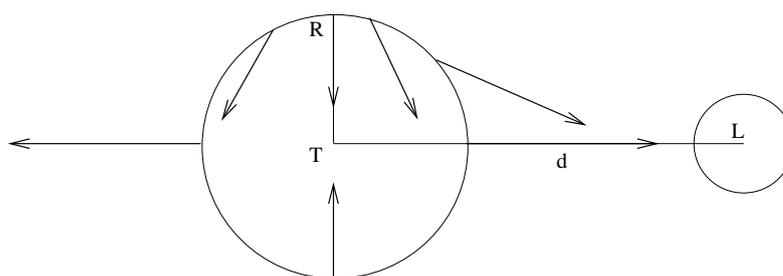


FIGURE 13 – Forces de marées.

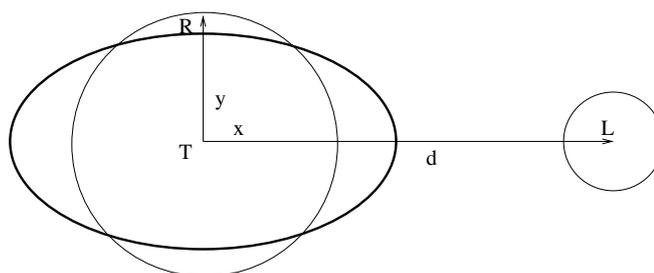


FIGURE 14 – Forme de l'équipotentielle.

Ce bourrelet reste dans la direction Terre-Lune alors que la Terre tourne en un jour. Pour un observateur fixe à la surface de la Terre ce bourrelet se déplace donc et passe en ce point avec une période de 12 h 25 min (= $12 \text{ h} \times (1 + 1/28)$) car la Lune se déplace pendant que la Terre a fait un tour). C'est ce qu'on appelle une onde de marée. Ce qu'on appelle en langage courant les *marées*, qui sont en fait le flux et le reflux de la mer le long des côtes, sont dues à la *différence* de déformation de marées entre la croûte et les océans.

[Faire avec auto-gravitation.]

3.4 Statique versus dynamique

Maintenant que nous connaissons les équations de comportement, nous pouvons revenir à l'hypothèse « statique versus dynamique ». Nous résolvons l'équation

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \sigma + \rho g + \rho \text{grad} \phi^m. \quad (99)$$

Remarquons tout de suite que, pour les marées, le deuxième terme de $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ est négligeable. En effet

$$\left| \frac{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}}{\partial \vec{v} / \partial t} \right| \simeq \frac{v^2/L}{v/T} = \frac{v}{L/T} = \frac{v_{particules}}{v_{onde}} = \frac{30 \text{ cm}/12 \text{ h}}{20000 \text{ km}/12 \text{ h}} \ll 1. \quad (100)$$

en notant L la longueur d'onde et T la période. En milieu fluide, la force de la rappel est la gravité, alors qu'en milieu élastique c'est l'élasticité et on négligera $\rho \vec{g}$ ³⁰.

On a aussi $\vec{v} = \partial_t \vec{u}$. On doit donc résoudre en milieu élastique (Terre solide) :

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} = (\lambda + 2\mu) \text{grad} \text{div} \vec{u} - \mu \text{rot} \text{rot} \vec{u} + \rho \text{grad} \phi^m \quad (101)$$

et dans le domaine fluide (océans) :

$$\rho \partial_t \vec{v} = -\text{grad} p + \rho \vec{g} + \rho \text{grad} \phi^m. \quad (102)$$

Divisons par $\rho u/L^2$ l'équation élastique : on reconnaît à gauche de la relation que les termes sont en $(L/T)^2$ et à droite³¹ en c_p^2 et c_s^2 . Pour les marées $L/T \sim 20\,000 \text{ km} / 12 \text{ h} = 500 \text{ m/s}$ alors que les vitesses sismiques sont de l'ordre de plusieurs kilomètres par seconde. Le terme d'accélération est donc négligeable : comme nous l'avons précédemment énoncé, la marée élastique est quasi-statique.

Projetée sur x et z , la relation fluide est de l'ordre de $\rho v_x/T = -p/L + \rho \phi^m/L$. $\rho v_z/T = -\partial_z p + \rho g + \rho \partial_z \phi^m$. L'incompressibilité $\text{div} \vec{v} = 0$ donne quant à elle : $v_x/L + v_z/H = 0$ et montre donc que $v_z \ll v_x$. D'autre part, sur l'épaisseur de l'océan le potentiel de marée est quasi constant verticalement (et la force est très petite devant g). Les composantes horizontales et verticales de (102) s'écrivent donc :

$$\rho \partial_t v_x = -\partial_x p + \rho \partial_x \phi^m. \quad (103)$$

$$0 = -\partial_z p - \rho g. \quad (104)$$

30. Pour les marées élastiques la gravité n'est pas négligeable non plus mais dans cette partie du cours nous ferons comme si. La prendre en compte nécessiterait un investissement théorique supplémentaire.

31. $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ sont les vitesses des ondes sismiques P et S.

La première se résoud en $p(x, z, t) = \rho g(h(x, t) - z)$. Injecté dans la seconde, cela donne :

$$\partial_t v_x = -g \partial_x h + \partial_x \phi^m. \quad (105)$$

On va maintenant faire l'hypothèse « d'eau peu profonde » : on suppose que la vitesse horizontale est constante sur une colonne d'eau : $\partial_z v_x = 0$. Ainsi, en intégrant verticalement l'incompressibilité $\partial_x v_x + \partial_z v_z = 0$ entre le fond rigide et la surface, on trouve $h \partial_x v_x + v_z(h) = 0$. D'autre part, une surface d'équation $S = \text{cste}$ vérifie $dS/dt = \partial_t S + \vec{v} \cdot \text{grad} S = 0$. Avec $S = z - h(x, t)$ cela donne $\partial_t h = v_z - v_x \partial_x h$. Cette relation et la précédente donnent donc $\partial_t h = -\partial_x(h v_x)$. Au premier ordre $h \simeq H = \text{cste}$ donc³² :

$$\partial_t h = -H \partial_x v_x. \quad (106)$$

La dérivée temporelle de cette relation et (105) donnent au final :

$$\partial_t^2 h - gH \partial_x^2 h = -H \partial_x^2 \phi^m. \quad (107)$$

Il s'agit de l'équation d'onde (membre de gauche) avec un terme source (la dérivée de la force de marée au terme de droite). La célérité $c = \sqrt{gH}$ est la vitesse de la houle en eau peu profonde.

Une onde marée est de la forme

$$\phi^m = \phi_0 \cos(kx - \omega t). \quad (108)$$

Pour l'onde M2 (lunaire semi-diurne) par exemple on a $k = 2\pi/20000$ km et $\omega = 2\pi/12$ h 25 min soit une vitesse de 1600 km/h. L'équation des ondes a des solutions libres dépendant de $x \pm ct$ et une solution forcée. Celle-ci est en $\cos(kx - \omega t)$ et son amplitude est donnée par remplacement dans l'équation. On trouve :

$$h = \frac{1}{1 - \frac{(\omega/k)^2}{c^2}} \frac{\phi_0}{g} \cos(kx - \omega t). \quad (109)$$

La réponse de l'océan dépend du rapport entre la vitesse c de la houle et la vitesse ω/k de l'onde de marée. On retrouve la solution statique quand l'onde de marée est très lente ($\omega/k \ll c$). Quand les deux vitesses sont égales, il y a résonance : le mouvement est théoriquement très grand, la théorie de premier ordre n'est plus valable. Quand la vitesse de l'onde est plus faible que c le premier rapport reste positif : l'eau se soulève sous l'astre, c'est le cas décrit dans les livres. Lorsque la vitesse de l'onde est plus grande que c l'amplification devient négative : l'eau s'abaisse sous l'astre ! Autrement dit, le bourrelet est en quadrature avec la direction de l'astre. Dans un chapitre précédent, nous avons déjà remarqué ce curieux phénomène que D'Alembert semble être le premier à avoir mis en évidence. La vitesse de la

32. Pour la même raison on aurait pu écrire aussi $v_z(h) \simeq \partial_t h$.

houle dans un océan de 4 km de profond est de 200 m/s = 720 km/h, soit un tour de Terre en 55 h. Les ondes de marée de période inférieures, notamment les principales, diurnes et semi-diurnes (24 h, 12 h, 12 h 25 etc), sont donc en quadrature. Seules les ondes de longues périodes voient leur bourrelet aligné avec l'axe Terre-Lune, et seules les très longues périodes peuvent être considérées comme statiques.

[voir et faire le sujet d'agregation 2009]

3.5 Déformation élastique

On se propose maintenant de calculer la déformation de la Terre solide. Celle-ci est élastique car l'échelle de temps de la déformation est la journée et statique car comme on l'a vu la réponse élastique de la Terre est bien plus rapide que les périodes de marées. Pour simplifier les calculs (et obtenir une solution analytique) nous supposons que la Terre est homogène : la densité ρ et les paramètres de Lamé λ et μ sont supposés constants. Dans une première partie, nous ne tenons pas compte du potentiel de redistribution des masses, c'est-à-dire du supplément de potentiel gravitationnel engendré par la déformation de la Terre.

On doit donc déterminer la déformation élastique d'une boule homogène soumise à une force de marée, c'est-à-dire résoudre l'équation d'élasto-statique au voisinage de la sphère :

$$(\lambda + 2\mu) \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \mu \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u} + \rho \vec{\text{grad}} \phi^m = 0 \quad (110)$$

avec

$$\phi^m = \frac{GM_L}{d^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} r^2 \quad (111)$$

et des contraintes nulles en surface.

Commençons par remarquer que le potentiel de marée dépend latéralement de l'harmonique sphérique de degré 2 et d'ordre 0 :

$$Y(\theta, \lambda) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}. \quad (112)$$

et on notera :

$$\phi^m = \phi_0 r^2 Y(\theta, \lambda). \quad (113)$$

Puisque ces harmoniques forment une base des fonctions sur la sphère, et que l'équation à résoudre est linéaire, alors les solutions varient latéralement comme Y .

Il reste donc à trouver la dépendance radiale. Comme souvent en géophysique, on va donc séparer les variations radiales des variations horizontales. On définit pour cela des opérateurs tangents à la sphère de rayon r . Rappelons que les opérateurs gradient, divergence et Laplacien s'écrivent en sphérique :

$$\vec{\text{grad}} f = \partial_r f \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\lambda f \vec{e}_\lambda$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{u} &= \partial_r u_r + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\lambda u_\lambda \\ \Delta f &= \partial_r^2 f + \frac{2}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\lambda^2 f.\end{aligned}$$

On appelle vecteur tangent, gradient tangent, divergence tangent et laplacien tangent les opérateurs définis par :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_r \vec{e}_r + \vec{u}_T \\ \vec{\operatorname{grad}} f &= \partial_r f \vec{e}_r + \vec{\operatorname{grad}}_T f \\ \operatorname{div} \vec{u} &= \partial_r u_r + 2 \frac{u_r}{r} + \operatorname{div}_T \vec{u}_T \\ \Delta f &= \partial_r^2 f + \frac{2}{r} \partial_r f + \Delta_T f.\end{aligned}$$

On a la relation utile $\Delta_T f = \operatorname{div}_T \vec{\operatorname{grad}}_T f$.

Décomposer \vec{u} sur les composantes u_θ, u_λ , ne se révèle pas être le plus judicieux. Le mieux est souvent de le décomposer sur un gradient et un rotationnel. Cela est formalisé par le théorème de Helmholtz qui dit que tout champ de vecteurs \vec{u} sur la sphère il existe trois uniques champ scalaires A, B, C tels que B et C sont de moyennes nulles sur la sphère³³ et³⁴³⁵ :

$$\vec{u} = A \vec{e}_r + \vec{\operatorname{grad}}_T(rB) + \vec{\operatorname{rot}}(C \vec{r}). \quad (115)$$

Nous utiliserons les deux variables intermédiaires :

$$D = \operatorname{div} \vec{u}, \quad rE = A - \partial_r(rB) \quad (116)$$

et décomposerons tous ces champs :

$$A = a(r)Y(\theta, \lambda), \quad B = b(r)Y(\theta, \lambda), \quad \dots \quad E = e(r)Y(\theta, \lambda), \quad (117)$$

Nous allons utiliser les résultats suivants³⁶ :

$$\Delta_T Y = -\frac{6}{r^2} Y \quad (118)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} = \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} - \Delta, \quad \operatorname{div} \vec{\operatorname{rot}} = 0, \quad \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{grad}} = 0. \quad (119)$$

33. On peut enlever cette condition, les champs B et C sont alors déterminés à une constante près.

34. $\vec{r} := r \vec{e}_r$.

35. La décomposition s'écrit aussi :

$$\vec{u} = A \vec{e}_r + \vec{\operatorname{grad}}_T(rB) + \vec{\operatorname{grad}}_T(rC) \wedge \vec{e}_r. \quad (114)$$

ce qui montre que les deux derniers termes sont tangents.

36. Par définition une harmonique sphérique Y_ℓ de degré ℓ est fonction propre du laplacien tangent : $\Delta_T Y_\ell = -\ell(\ell+1)Y_\ell/r^2$. La relation (120) se montre en décomposant $\partial_i \partial_i (f r_j)$ et en remarquant que $\partial_i r_j = \delta_{ij}$. Pour montrer (121) on utilise (119a), puis (120) et l'expression de la divergence.

$$\Delta(f\vec{r}) = (\Delta f)\vec{r} + 2\vec{\text{grad}}f. \quad (120)$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{\text{rot}}(f\vec{r}) = \vec{\text{grad}}(r\partial_r f + f) - (\Delta f)\vec{r}. \quad (121)$$

On exprime maintenant :

$$\text{div}\vec{u} = \partial_r u_r + 2\frac{u_r}{r} + \text{div}_T \vec{\text{grad}}_T(rB) = \partial_r A + 2\frac{A}{r} - 6B/r, \quad \text{et} \quad (122)$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{u} = \vec{\text{rot}}\left((A - \partial_r(rB))\vec{e}_r + \vec{\text{grad}}(rB) + \vec{\text{rot}}(C\vec{r})\right) \quad (123)$$

En utilisant (119) et la définition de E on obtient :

$$\vec{\text{rot}}\vec{u} = \vec{\text{rot}}(E\vec{r}) + \vec{\text{grad}}\text{div}(C\vec{r}) - \Delta(C\vec{r}). \quad (124)$$

Puis avec (121) et (120) :

$$\vec{\text{rot}}\vec{\text{rot}}\vec{u} = \vec{\text{grad}}(r\partial_r E + E) - (\Delta E)\vec{r} - \vec{\text{rot}}((\Delta C)\vec{r}). \quad (125)$$

L'équation de l'élasto-statique s'écrit finalement :

$$(\lambda+2\mu)\vec{\text{grad}}D - \mu\vec{\text{grad}}(r\partial_r E + E) + \mu(\Delta E)\vec{r} + \mu\vec{\text{rot}}((\Delta C)\vec{r}) + \rho\vec{\text{grad}}\phi^m = 0. \quad (126)$$

Il est facile de reconnaître dans cette relation une forme telle que celle de l'eq. (115). En vertu de l'unicité de la décomposition, il vient trois équations scalaires :

$$\Delta C = 0, \quad (127)$$

$$(\lambda + 2\mu)D - \mu(r\partial_r E + E) + \rho\phi^m = 0, \quad (128)$$

$$(\lambda + 2\mu)\partial_r D - \mu\partial_r(r\partial_r E + E) + \mu(\Delta E)r + \rho\partial_r\phi^m = 0 \quad (129)$$

c'à-d. :

$$\Delta C = 0, \quad (130)$$

$$\Delta E = 0, \quad (131)$$

$$(\lambda + 2\mu) D - \mu (r\partial_r E + E) + \rho \phi^m = 0. \quad (132)$$

La première s'écrit $\Delta C = (\partial_r^2 c + (2/r)\partial_r c - 6c/r^2)Y = 0$, dont les solutions sont r^{-3} et r^2 . Seule r^2 ne diverge pas. Les solutions sont donc de la forme :

$$C = c_0 r^2 Y, \quad E = e_0 r^2 Y. \quad (133)$$

D'après la définition de E , il vient $a = \partial_r(rb) + e_0 r^3$, et avec (122) :

$$d = r\partial_r^2 b + 4\partial_r b - 4b/r + 5e_0 r^2 \quad (134)$$

La relation (132) devient alors

$$(\lambda + 2\mu) (r\partial_r^2 b + 4\partial_r b - 4b/r) + (5\lambda + 7\mu)e_0 r^2 + \rho \phi_0 r^2 = 0. \quad (135)$$

Elle a deux solutions homogènes, r et r^{-4} , dont seule la première est non divergente, et une solution particulière en r^3 , si bien que :

$$b = b_0 r^3 + b_1 r \quad (136)$$

avec (condition sur la solution particulière) :

$$14(\lambda + 2\mu)b_0 + (5\lambda + 7\mu)e_0 + \rho \phi_0 = 0 \quad (137)$$

Continuons à tout exprimer en fonction de e_0 , b_0 et b_1 :

$$a = \partial_r(rb) + e_0 r^3 = 4b_0 r^3 + 2b_1 r + e_0 r^3, \quad (138)$$

$$d = r\partial_r^2 b + 4\partial_r b - 4b/r + 5e_0 r^2 = (14b_0 + 5e_0)r^2 \quad (139)$$

Il nous reste à exprimer la nullité de la traction au bord ($r = R$). Or celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \partial_r u_r, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{r\lambda} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\lambda u_r + \partial_r u_\lambda - \frac{u_\lambda}{r} \right). \end{aligned}$$

En utilisant :

$$u_r = A, \quad u_\theta = \partial_\theta B + \partial_\lambda C / \sin \theta, \quad u_\lambda = \partial_\lambda B / \sin \theta - \partial_\theta C, \quad (140)$$

et le fait qu'aucune des variables ne dépend de la longitude :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\mu \partial_\theta}{r} (A + r\partial_r B - B) \quad \sigma_{r\lambda} = -\mu \partial_\theta (\partial_r C - C/r). \quad (141)$$

La nullité de la traction implique donc :

$$a + r\partial_r b - b = 0, \quad \partial_r c - c/r = 0, \quad \text{en } r = R. \quad (142)$$

La seconde égalité donne $c_0 = 0$; la première :

$$2b_1 + (6b_0 + e_0)R^2 = 0 \quad (143)$$

Reste la nullité de la contrainte radiale, qui tout calcul fait s'écrit :

$$0 = \sigma_{rr} = \lambda D + 2\mu\partial_r A = \dots = (4\mu b_1 + 2(7\lambda + 12\mu)b_0 R^2 + (5\lambda + 6\mu)e_0 R^2)Y \quad (144)$$

Les 3 équations (137), (143), (144) à 3 inconnues se résolvent en :

$$b_0 = -\frac{5\lambda + 4\mu}{2(19\lambda + 14\mu)} \frac{\rho\phi_0}{\mu} \quad b_1 = \frac{4\lambda + 3\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho\phi_0}{\mu} R^2 \quad e_0 = \frac{7\lambda + 6\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho\phi_0}{\mu}. \quad (145)$$

Le déplacement s'écrit, rappelons-le :

$$\vec{u} = aY\vec{e}_r + \text{grad}_T(rbY) = (2b_1 r + (4b_0 + e_0)r^3)Y\vec{e}_r + (b_1 r^2 + b_0 r^4)\text{grad}_T Y. \quad (146)$$

Le déplacement radial de la surface de la Terre vaut donc :

$$u_r(R) = \frac{5\lambda + 4\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho\phi_0}{\mu} R^3 \quad (147)$$

qu'on peut écrire aussi :

$$u_r(R) = \frac{5\lambda + 4\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho g R}{\mu} \frac{\phi_0 R^2}{g} Y \quad (148)$$

La dernière fraction est la marée d'équilibre, qui vaut 36 cm (pour la partie radiale, et 5 cm pour la partie horizontale)³⁷. Avec $\lambda = \mu = 1, 1.10^{11}$ Pa on trouve $\rho g R/\mu = 3, 19$ et

$$u_r = 0, 87 \frac{\phi_0 R^2}{g} Y = 31 \text{ cm } Y. \quad (149)$$

On appelle nombre de Love h_2 le nombre tel que $u_r(R) = h_2 \frac{\phi_0 R^2}{g} Y$ et on trouve donc :

$$h_2 = \frac{5\lambda + 4\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho g R}{\mu} \approx 0, 87. \quad (150)$$

En tenant compte du potentiel de redistribution des masses, Hurford et Greenberg (2001) donnent :

$$h_2 = \frac{5\lambda + 4\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho g R}{\mu} \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \frac{5\lambda + 4\mu}{19\lambda + 14\mu} \frac{\rho g R}{\mu}} \approx 0, 64. \quad (151)$$

Le déplacement correspondant pour la marée M2 (lunaire semi-diurne) est de 24 cm. Pour le S2 c'est donc 11 cm. La somme et la différence sont de 35 et 13 cm (xxx vérifier).

37. xxx A voir pourquoi wikipedia donne 38 cm :
http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_tide .

3.6 Contrainte sur la surface déformée, et pas sphérique

Il faut en fait appliquer la nullité de la contrainte sur la surface déformée. Or $\sigma_{ij}(R + u_r) = \sigma_{ij}(R) + (\partial_r \sigma_{ij}) u_r$ or au premier ordre $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ donc $\sigma_{ij}(R + u_r) = \sigma_{ij}(R) - (\partial_r p) u_r = \sigma_{ij}(R) - \rho g_r u_r$. Dans la terme de droite de la relation (144) il faut donc ajouter

$$-\rho g_r A = -\rho g_r (4b_0 R^3 + 2b_1 R + e_0 R^3) Y. \quad (152)$$

et elle devient ainsi

$$0 = ((4\mu - 2\rho g_r R)b_1 + 2(7\lambda + 12\mu - 2\rho g_r R)b_0 R^2 + (5\lambda + 6\mu - \rho g_r R)e_0 R^2) Y \quad (153)$$

La suite est trop calculatoire et de toute façon ce serait probablement faux puisqu'on a supposé dans l'équation de départ de Navier que la Terre n'est pas précontrainte.

Par contre, on peut tenir compte du potentiel de redistribution des masses.

3.7 Potentiel de redistribution des masses

Le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho. \quad (154)$$

La solution à symétrie sphérique de $\partial_r^2\phi + (2/r)\partial_r\phi = -4\pi G\rho$, nulle à l'infini, de gradient nul à l'infini, pour une densité constante est :

$$\phi = \frac{4\pi G\rho}{3} \frac{3R^2 - r^2}{2} \quad \text{à l'intérieur,} \quad (155)$$

$$\phi = \frac{4\pi G\rho}{3} \frac{R^3}{r} \quad \text{à l'extérieur.} \quad (156)$$

La gravité correspondante vaut :

$$g_r = -\frac{4\pi G\rho}{3} r \quad \text{à l'intérieur,} \quad (157)$$

$$g_r = -\frac{4\pi G\rho}{3} \frac{R^3}{r^2} \quad \text{à l'extérieur.} \quad (158)$$

La Terre se déformant, son potentiel de gravité change : l'incrément de potentiel $\delta\phi$ est appelé *potentiel de redistribution des masses*. Au potentiel de marée il faut donc ajouter celui-ci, qui vérifie :

$$\Delta(\delta\phi) = 0. \quad (159)$$

Pour une harmonique de degré ℓ cela s'écrit :

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \delta\phi_\ell^m(r) Y_\ell^m = 0. \quad (160)$$

Les solutions sont :

$$\delta\phi = \phi_i r^\ell Y_\ell^m \quad \text{à l'intérieur}, \quad (161)$$

$$\delta\phi = \phi_e r^{-\ell-1} Y_\ell^m \quad \text{à l'extérieur}. \quad (162)$$

Le potentiel d'un Terre homogène déformée par un déplacement de surface u_r est alors $\phi + \delta\phi$ vérifiant les continuités du potentiel et de la gravité *sur la surface déformée* :

$$(\phi + \delta\phi)_{\text{intérieur}}(r = R + u_r) = (\phi + \delta\phi)_{\text{extérieur}}(r = R + u_r) \quad \text{et} \quad (163)$$

$$\partial_r(\phi + \delta\phi)_{\text{intérieur}}(r = R + u_r) = \partial_r(\phi + \delta\phi)_{\text{extérieur}}(r = R + u_r) \quad (164)$$

Les termes $\delta\phi$ sont déjà du premier ordre, il suffit donc de les prendre en $r = R$. On obtient alors en développant les termes en ϕ :

$$-\frac{4\pi G\rho}{3} R u_r + \phi_i R^\ell Y_\ell^m = -\frac{4\pi G\rho}{3} R u_r + \phi_e R^{-\ell-1} Y_\ell^m \quad (165)$$

$$-\frac{4\pi G\rho}{3} R u_r + \phi_i \ell R^{\ell-1} Y_\ell^m = \frac{8\pi G\rho}{3} R u_r - \phi_e (\ell+1) R^{-\ell-2} Y_\ell^m. \quad (166)$$

Ces deux relations se résolvent aisément et donnent :

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\rho R}{2\ell+1} \left(\frac{r}{R} \right)^\ell (u_r)_\ell^m Y_\ell^m \quad \text{à l'intérieur}, \quad (167)$$

$$\delta\phi = \frac{4\pi G\rho R}{2\ell+1} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} (u_r)_\ell^m Y_\ell^m \quad \text{à l'extérieur}. \quad (168)$$

Avec $g = 4\pi G\rho R/3$, on peut l'écrire aussi :

$$\delta\phi = \frac{3}{2\ell+1} g \left(\frac{r}{R} \right)^\ell (u_r)_\ell^m Y_\ell^m \quad \text{à l'intérieur}, \quad (169)$$

$$\delta\phi = \frac{3}{2\ell+1} g \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} (u_r)_\ell^m Y_\ell^m \quad \text{à l'extérieur}. \quad (170)$$

Le potentiel est donc de même degré que la topographie. Pour la marée, la topographie est de degré 2 donc le potentiel de redistribution des masses aussi. Puisqu'il varie en r^2 il est exactement de la même forme que le potentiel de marée. Dans les équations élastiques, il suffit donc de remplacer (par exemple dans l'équation xxx) ϕ_0 par $\phi_0 + \frac{3gu_r}{5R^2}$.

[Ces calculs sont un peu bizarres car on suppose que la densité reste constante alors qu'il y a du $\text{div}\vec{u}$.]

3.8 Les marées océaniques

(non rédigé)

Le potentiel de marée se décompose sur des fonctions sphériques (Laplace, Kelvin, Doodson) :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda, \theta, t) &= \frac{GMr^2}{d^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \frac{3 \cos^2 \delta - 1}{2} \\ &+ \frac{3GMr^2}{d^3} \sin \theta \cos \theta \sin \delta \cos \delta \cos(\omega t + \lambda - \alpha) \\ &+ \frac{3GMr^2}{4d^3} \sin^2 \theta \cos^2 \delta \cos 2(\omega t + \lambda - \alpha)\end{aligned}$$

avec λ la longitude, θ la colatitude, $\alpha = nt$ l'ascension droite de l'astre, $\delta = \delta_0 \cos(nt)$ la déclinaison de l'astre.

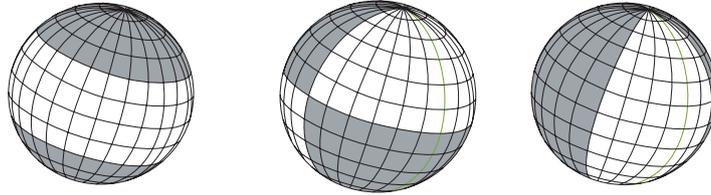


FIGURE 3.8 – Répartition « zonale » du terme « longues périodes » ou « basses fréquences » : $U_0 \propto (\sin^2 \theta - 1/3)(\sin^2 \delta - 1/3)$.

Répartition tessérale du terme diurne : $U_1 \propto \sin 2\theta \sin 2\delta \cos \lambda$.

Répartition sectorielle du terme semi-diurne : $U_2 \propto \cos^2 \theta \cos^2 \delta \cos 2\lambda$.

FIGURE 15 – Forme des 3 fonctions sphériques.

Il faut résoudre les équations de Laplace. En cartésiennes :

$$\begin{aligned}\partial_t v_x &= -g \partial_x \eta + f v_y + \partial_x \phi \\ \partial_t v_y &= -g \partial_y \eta - f v_x + \partial_y \phi \\ \partial_t \eta &= -H (\partial_x v_x + \partial_y v_y)\end{aligned}$$

(avec $f = 2\omega \cos \theta$), soit

$$\partial_t^2 \eta + (f^2 - gH\Delta)\eta = -H \partial_x^2 \phi. \quad (171)$$

I. Solution sans force de Coriolis (bassin uni-dimensionnel)

$$\partial_t^2 \eta - gH \partial_x^2 \eta = -H \partial_x^2 \phi. \quad (172)$$

Solution sinusoïdale dans un bassin fermé de longueur L avec $k = \omega/b$, $K = \omega/c$, $c = \sqrt{gH}$, $\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t)$.

$$\eta(x, t) = \frac{\phi_0}{g} \frac{1}{1 - \frac{K^2}{k^2}} \quad (173)$$

$$\times \left\{ \cos(kx - \omega t) + \frac{K \sin(K - k)L/2}{k \sin KL} \cos(Kx + \omega t) - \frac{K \sin(K + k)L/2}{k \sin KL} \cos(Kx - \omega t) \right\}.$$

- Bassin non fermé : $\eta \propto \cos(kx - \omega t)$.
- η infini pour $KL = n\pi \Leftrightarrow \frac{2L}{cT} = n$.
- Marée d'équilibre : $K \ll k$.
- Océans : $K \gg k$, $\eta \propto \sin Kx \sin \omega t$.

Solution de la forme :

$$\eta(x, t) = \eta_0(x) \cos \omega(t - \varphi(x)). \quad (174)$$

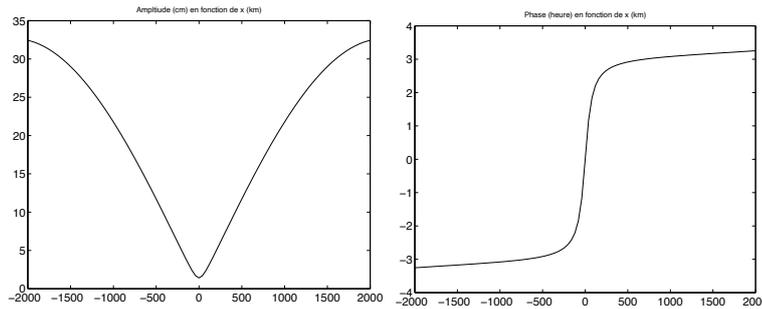


FIGURE 16 – Atlantique (4000 km x 4000 m). Amplitude $\eta_0(x)$ (cm), Phase $\varphi(x)$ (heure).

Autogravitation \rightarrow 90 cm.

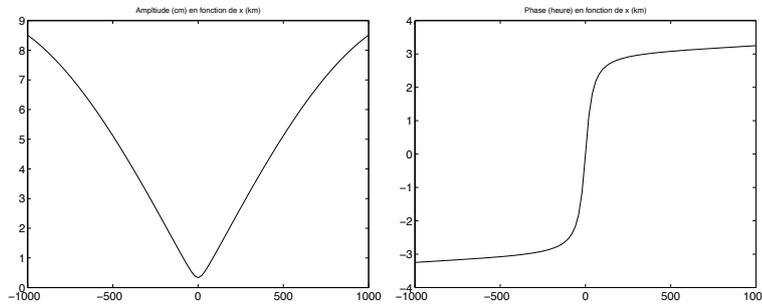


FIGURE 17 – Méditerranée E (2000 km x 1500 m). Amplitude $\eta_0(x)$ (cm), Phase $\varphi(x)$ (heure).

II. Solution avec force de Coriolis (ondes de Kelvin)

$$\partial_t^2 \eta + (f^2 - gH\Delta)\eta = -H\partial_x^2 \phi. \quad (175)$$

$$\eta(x, y, t) = \eta_0 e^{-fy/\sqrt{gH}} e^{i\omega(t-x/\sqrt{gH})}. \quad (176)$$

Rayon de déformation de Rossby : $L_R = \frac{\sqrt{gH}}{f}$.

III. Solutions réelles

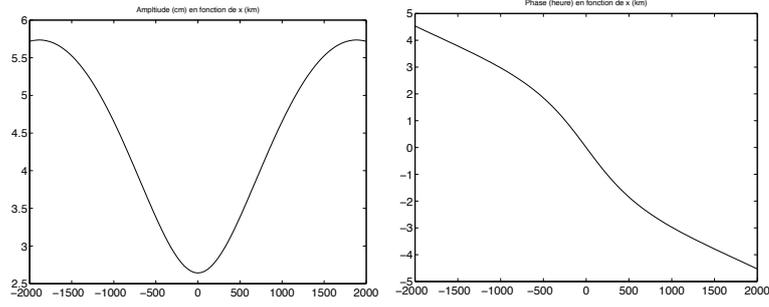


FIGURE 18 – Méditerranée E (4000 km x 1500 m). Amplitude $\eta_0(x)$ (cm), Phase $\varphi(x)$ (heure).

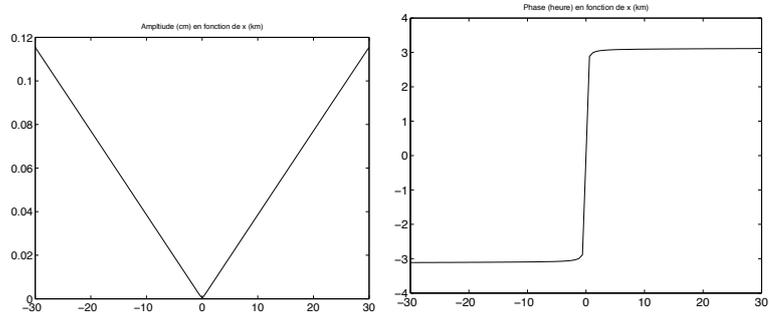


FIGURE 19 – Lemman (60 km x 150 m). Amplitude $\eta_0(x)$ (cm), Phase $\varphi(x)$ (heure).

M2 (Lune, semi-diurne) Lignes cotidales, points amphidromiques, amplitude

Résolution en modes

$$\partial_t^2 \eta(x, y, t) + (f^2 - gH\Delta)\eta(x, y, t) = F(x, y, t). \quad (177)$$

c.à.d.

$$\partial_t^2 \eta + L\eta = F. \quad (178)$$

Fourier : $\eta = \sum_{\omega} \hat{\eta} e^{i\omega t}$, $F = \sum_{\omega} \hat{F} e^{i\omega t}$.

Modes, solution de $-\omega^2 \hat{\eta} + L\hat{\eta} = 0$.

Vecteurs propres Φ_k , valeurs propres ω_k^2 .

Solution de l'équation avec forçage :

Décomposition sur les modes :

$$\hat{\eta}(x, y, \omega) = \sum_k \hat{\eta}_k(\omega) \Phi_k(x, y) \quad \hat{F}(x, y, \omega) = \sum_k \hat{F}_k(\omega) \Phi_k(x, y) \quad (179)$$

donc

$$\hat{\eta}(x, y, \omega) = \sum_k \frac{\hat{F}_k(\omega)}{\omega_k^2 - \omega^2} \Phi_k(x, y). \quad (180)$$

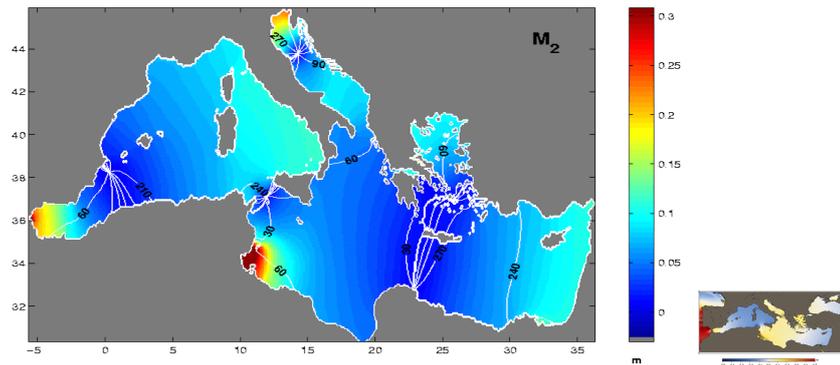


FIGURE 20 – Amplitude (couleur) et phase (lignes blanches chiffrées) de la marée en Méditerranée. Vignette à droite : film. Film CNES/Aviso (local) (url) Autre film avec lignes 'de niveau' (local).

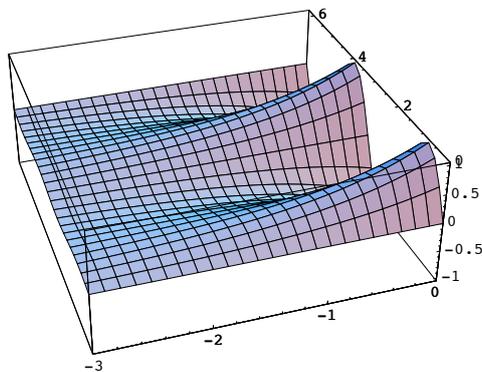


FIGURE 3.1 – Structure d'une onde de Kelvin monochromatique le long d'une côte rectiligne.

Films :

Video M2 Roulet (local) (url)

Video M2 GOT99 (local) (url)

Video K1 GOT99 (local) (url)

Video 1970's (local) (url)

Video 1930 (local) (url)

Video LEGOS - Toulouse (url)

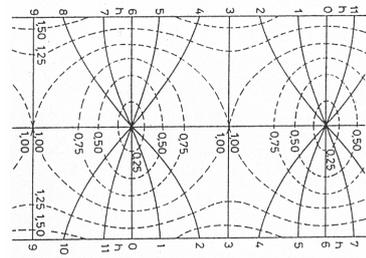


FIGURE 21 – Onde de Kelvin dans un canal infini. Lignes cotidales (plein) et d'égales amplitudes (tirets).

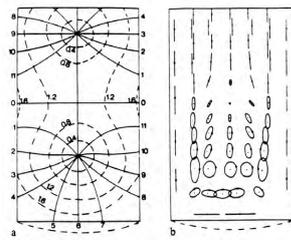
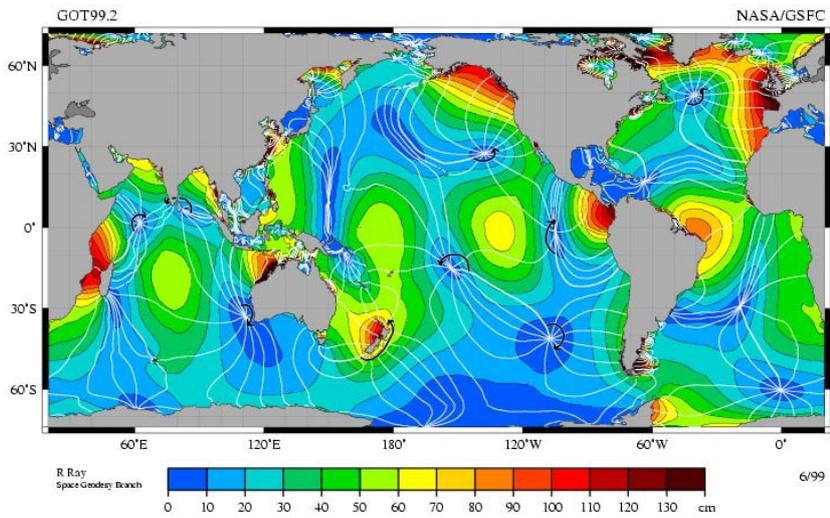


Figure 5.4: The amphidromic pattern (a) and particle trajectories (b) near the closed end of a channel for a reflected Kelvin wave. Curves of equal amplitude are given by the broken lines; curves of constant phase by the solid lines. (From Gill (1982), adopted from the original 1920 paper of G.I. Taylor.



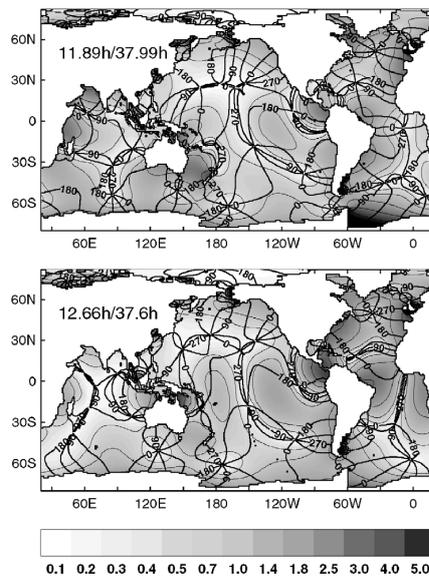


Fig. 8. Normalized amplitudes of sea-surface elevation and lines of equal phases: (top) the 11.89-mode with a decay time of 37.99 h; (bottom) the 12.66-mode with a decay time of 37.60 h.

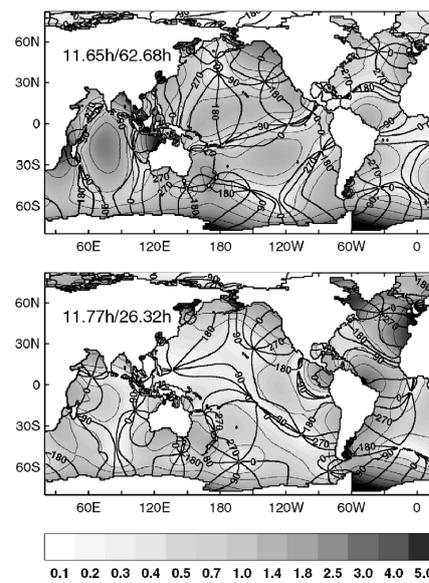


Fig. 9. Normalized amplitudes of sea-surface elevation and lines of equal phases: (top) the 11.65-mode with a decay time of 62.68 h; (bottom) the 11.77-mode with a decay time of 26.32 h.

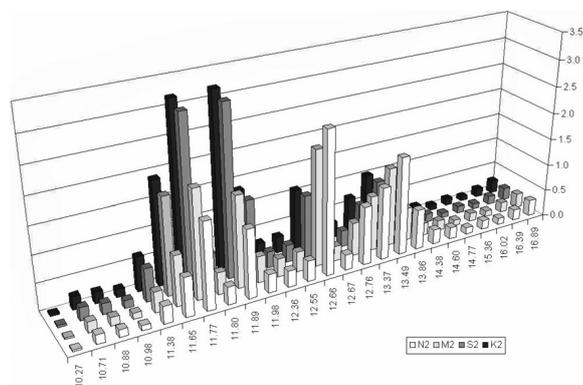


Fig. 5. The expansion coefficients \bar{a}_k of individual free oscillations when forced by the semidiurnal potentials of second degree (K_2, S_2, M_2, N_2).

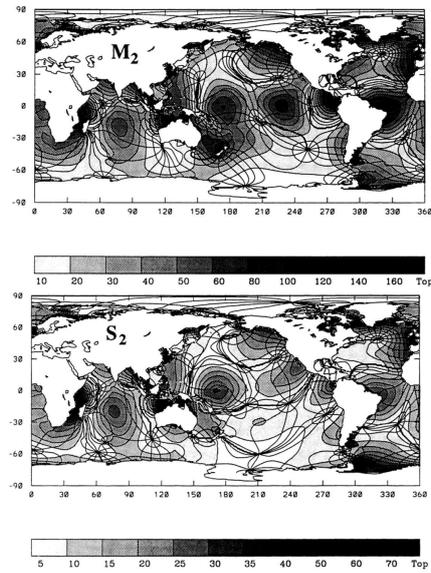
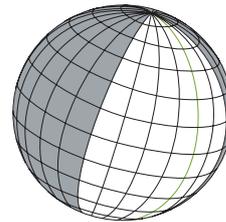


FIGURE 3.4 – Onde de marée pour les composantes M2 et S2. Amplitude en cm. Lignes cotidales tous les 30°. La ligne épaisse indique le passage au méridien de Greenwich (de Le Provost et al. 1994)



Répartition sectorielle du terme semi-diurne : $U_2 \propto \cos^2 l \cos^2 2t_1$

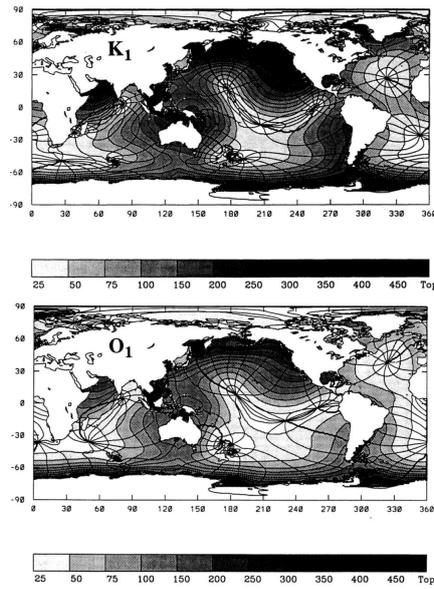
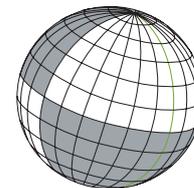
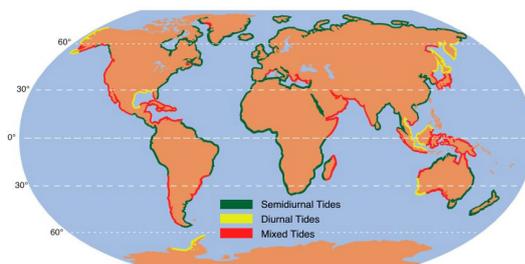
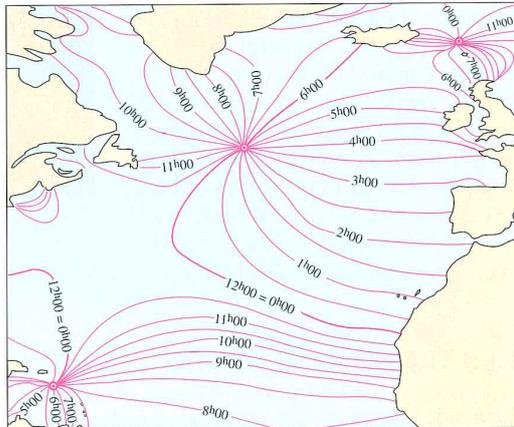


FIGURE 3.5 – Onde de marée pour les composantes K1 et O1. Amplitude en mm (au lieu de cm pour la figure précédente). Lignes cotidales tous les 30°. La ligne épaisse indique le passage au méridien de Greenwich (de Le Provost et al. 1994)



Répartition tessérale du terme diurne : $U_1 \propto \sin 2l \sin 2t_1 \cos t_1$





Points amphidromiques en Atlantique nord
(les heures de pleine mer sont rapportées au passage de la Lune au méridien de Greenwich)

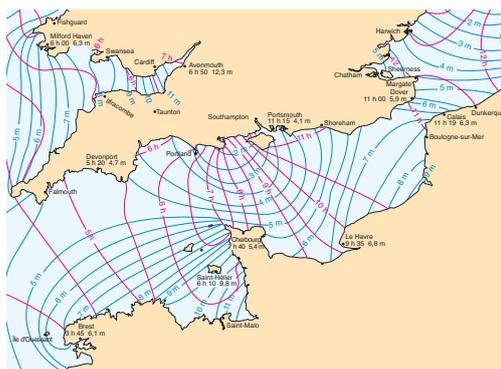
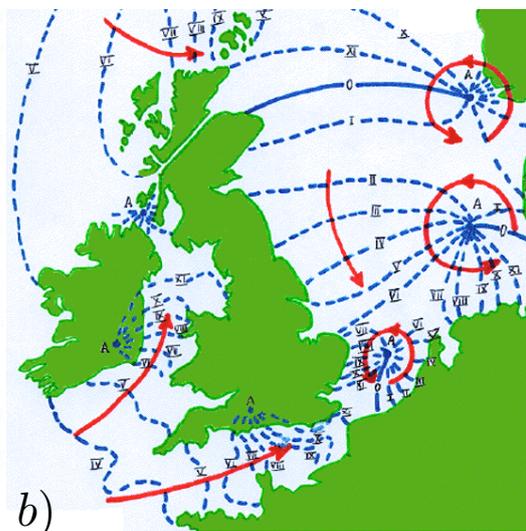


FIGURE 9.4 — Carte cotidienne de la Manche. Les lignes bleues joignent les points où les marnages sont égaux (ici en vive-eau) et les lignes rouges les points atteints par une pleine mer au même instant.



[Corrections : à partir de là, il manque beaucoup de virgules.]

4 Les marées dans l'Univers

4.1 Les forces de marées sur les humains

On entend souvent : « le corps humain est composé à 60 % d'eau, le Soleil et la Lune arrivent à déformer l'océan, ils doivent donc agir sur le corps humain. » Voyons pourquoi cette conclusion est fautive.

L'amplitude de la force de marée à la verticale de la Lune est (eq. 89) est égale à

$$g_L^m = 2 \frac{GM_L}{d^3} R. \quad (181)$$

A la surface de la Terre, on trouve ainsi que l'ordre de grandeur des variations d'accélération que nous subissons du fait des forces de marée lunaires est $g_L^m = 10^{-7} g$. Cette accélération est-elle importante ? La réponse est assez simple : l'accélération d'un ascenseur est souvent calibrée à $10^{-1} g$ (Wikipédia, ASCENSEUR), c'est très supérieur aux forces de marée. Si la force d'attraction de la Lune ou du Soleil provoque un surcroît d'accouchements, alors il faut immédiatement interdire l'ascenseur aux femmes enceintes avant le terme, et au contraire leur faire prendre quand on veut provoquer un déclenchement.

J'ai aussi entendu que l'action de mon voisin qui se promène au dessus de ma tête est plus importante que celle de la Lune. Voyons cela. Son attraction sur moi est $a = Gm/h^2$ avec $m = 80$ kg sa masse et $h = 2$ m la hauteur du plafond. On trouve $a = 6.10^{-11} g$, ce qui est plus petit que l'accélération de marée.

En fait, il y a deux notions différentes. Il y a l'accélération verticale qui nous tire vers le haut ou le bas. C'est la force que nous avons traitée dans les paragraphes précédents. Il y a aussi le différentiel de force, entre notre tête et nos pieds, qui nous étire ou nous comprime. C'est, parfois, ce différentiel qu'on interprète comme étant l'effet de la force de marée sur nous.

Ce différentiel de force de la Lune sur moi qui suis de taille $r = 1$ m vaut

$$\Delta g_L^m = 2 \frac{GM_L}{d^3} r = 2.10^{-14} g \quad (182)$$

et le différentiel de force de mon voisin sur moi vaut

$$\Delta a = 2 \frac{Gm}{h^3} r = 10^{-10} g. \quad (183)$$

Le second est donc plus important. Comme le fait remarquer Henri Broch³⁸, une maman qui porte son enfant exerce un différentiel de force de $\Delta a = 10^{-7} g$ ce qui est 10 millions de fois plus grand que celui de la Lune.

38. 1994, cité par Laurent Puech p. 119 de son livre *Astrologie, derrière les mots*, 2005.

Conclusion. Que l'on considère l'accélération, ou le différentiel d'accélération, les phénomènes locaux sont bien plus importants sur un humain que les astres.

Et les océans alors ? Les forces de marées sont très faibles. Elle ne font pencher la surface de l'eau que d'un angle de l'ordre de $g_L^m/g = 10^{-7}$. Sur une distance de 4000 km, cet angle provoque une élévation de l'eau de 40 cm, ce qui est visible. Ce n'est donc que parce que l'océan est immense que l'on voit l'influence des forces de marée. Même si notre cerveau était liquide, l'élévation provoquée ne serait que de 10^{-7} mètres. Avouez que c'est très très faible (et de toute façon bien inférieur aux variations provoquées par nos mouvements de tête). C'est aussi pour cela que vous ne pouvez observer les effets de la force de marée sur l'eau contenue dans un verre.

4.2 Marée galactique

Donnons un ordre de grandeur de la marée d'origine galactique sur le Système solaire. Supposons que le Système solaire à une orbite circulaire autour du centre de la Galaxie, où est concentré toute sa masse. La révolution du Système solaire autour du centre se fait en $T = 240$ millions d'années, la distance Soleil-Centre galactique est $D = 30000$ années-lumière et la distance Terre-Soleil est $d = 8$ minutes-lumière.

La force (accélération) de marée galactique sur l'orbite de la Terre vaut

$$f_G = 3 \frac{GM}{D^3} d \quad (184)$$

et l'orbite du système solaire vérifie la loi de Kepler :

$$GM = (2\pi/T)^2 D^3. \quad (185)$$

La force de marée galactique vaut donc

$$f_G = 3 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 d. \quad (186)$$

Comparons-la à la force d'attraction du Soleil $g_S = GM_S/d^2$ avec $GM_S = (2\pi/t)^2 d^3$ ou $t = 1$ an. Ainsi

$$g_S = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^2 d. \quad (187)$$

Il vient alors

$$f_G = 3 \left(\frac{t}{T} \right)^2 g_S = 5.10^{-17} g_S. \quad (188)$$

La force de marée galactique est donc bien plus petite que la force d'attraction solaire.

4.3 A faire

- histoire : les marées depuis l'antiquité, voir Deparis et Cartwright, et <http://www.cosmovisions.com/ChronoMarees.htm> et l'Encyclopédie
- nb de Love, transfert de moment : voir Rambaux p 171 dans Souchay.
- limite de Roche,
- la synchronisation des satellites, voir Tokieda p 24 dans Souchay
- sur les satellites des planètes, cf Souchay
- sur la Lune,
- sur les étoiles, cf Souchay
- sur les galaxies, cf Souchay

5 Histoire des marées

6 La marée en pratique

6.1 Sur les continents

6.2 Les ondes de marées

6.3 Dans les océans

Nous avons listé les principales ondes dans les tables suivantes (sans la phase)³⁹.

39. Ref et unité de l'amplitude : [Voir Hendershott 2004 pour l'explication des coeff., la rajouter ici, ainsi que le nombre de Doodson D .]

TABLE 1 – Composantes lunaires.

Symbole	Nom	vitesse angulaire (degré/heure)	période (jour ou heure)	amplitude $\times 10^5$
-Constant term				
M0	constant term	0.00000000	∞	50458
- Long period				
Mm	monthly	0.54437468	27.55455017 j	8253
Msf	variational	1.01589576	14.76529408 j	1367
Mf	bimonthly	1.09803304	13.66079044 j	15640
- Diurnal				
2Q1	elliptic 2d order	12.85428623	28.00622177 h	952
Q1	main elliptic	13.39866092	26.86835670 h	7206
ρ 1	evectional	13.47151452	26.72305298 h	1368
O1	lunar principal	13.94303560	25.81934166 h	37689
M1	elliptic minor	14.49669396	24.83324814 h	2961
K1	declinational	15.04106864	23.93446922 h	36232
J1	elliptic 2d order	15.58544332	23.09847641 h	2959
OO1	lunar 2d order	16.13910168	22.30607414 h	1615
- Semi-diurnal				
2N2	elliptic 2d order	27.89535487	12.90537453 h	2300
μ 2	variational	27.96820848	12.87175751 h	2777
N2	main elliptic	28.43972956	12.65834808 h	17391
NU2	evectional maj.	28.51258316	12.62600422 h	3302
M2	lunar mean	28.98410424	12.42060089 h	90812
λ 2	evectional min.	29.45562532	12.22177410 h	669
L2	elliptic min.	29.52847892	12.19161987 h	2567
K2	declinational	30.08213728	11.96723461 h	7852
- Ter-diurnal				
M3		43.47615636	8.28040123 h	1188

TABLE 2 – Composantes solaires.

Symbole	Nom	vitesse angulaire (degré/heure)	période (jour ou heure)	amplitude $\times 10^5$
- Constant term				
	constant term	0.00000000	∞	23411
- Long period				
Sa	annual	0.04106864	365.24218966 j	1176
Ssa	semi-annual	0.08213728	182.62109375 j	7245
- Diurnal				
P1	solar principal	14.95893136	24.06588936 h	16817
S1	radiational	15.00000000	24.00000000 h	-423
K1	declinational	15.04106864	23.93446922 h	16124
- Semi-diurnal				
T2	elliptic major	29.95893332	12.01644897 h	2472
S2	solar mean	30.00000000	12.00000000 h	42286
R2	elliptic minor	30.04106668	11.98359585 h	437
K2	declinational	30.08213728	11.96723461 h	3643

D'après Simon et al., 2013. En français dans (Simon, 2007).

7 Rotation de la Terre et des planètes

Pour étudier la rotation d'un corps, il est pratique d'utiliser le théorème du moment cinétique. Nous allons commencer par l'utiliser dans le référentiel galiléen où il s'écrit :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{C}. \quad (189)$$

Nous allons démontrer quelques résultats classiques. Simples à montrer dans le cas indéformable, ils deviennent plus délicats si la Terre est supposée déformable. Quoiqu'il en soit, le tenseur d'inertie est le paramètre déterminant de la rotation.

7.1 Le tenseur d'inertie

L'utilisation du moment cinétique est facilitée si le système est supposé solide, c'est-à-dire indéformable, ou quasi-solide. En effet, on a le :

Théorème d'Euler

Tout mouvement instantané d'un solide peut être décrit par une translation et une rotation : quelque soit le référentiel considéré, il existe un unique vecteur $\vec{\omega}$ tel que pour tout point P du solide le champ de vitesse s'écrit dans ce référentiel :

$$\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM} \quad (190)$$

où \vec{v}_P est le vecteur vitesse uniforme décrivant la translation du corps et où le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est indépendant du choix du point P .

Dém : cette propriété se démontre à l'aide du théorème de composition des vitesses en considérant un référentiel quelconque et un autre attaché au solide dans lequel la vitesse est nulle.

Prenons P au centre de masse ($P = G$) :

$$\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}, \quad (191)$$

le moment cinétique d'un corps solide (toujours par rapport à un point A fixe quelconque) peut se mettre alors sous la forme :

$$\vec{H} = \mathcal{M} \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_G + \mathcal{I} \vec{\omega}, \quad (192)$$

avec \mathcal{I} un tenseur d'ordre 2 appelé *tenseur d'inertie* par rapport à G et défini

par^{40, 41} :

$$\mathcal{I} = \int_V \rho \overrightarrow{GM} \wedge (\cdot \wedge \overrightarrow{GM}) \, dV = \int_V \rho \left(GM^2 I_d - \overrightarrow{GM} \otimes \overrightarrow{GM} \right) \, dV. \quad (195)$$

Le premier terme de \vec{H} est un moment cinétique de révolution autour de A , le second est un moment de rotation autour de G . L'expression de \mathcal{I} signifie que dans un repère centré en G les composantes cartésiennes de \mathcal{I} s'écrivent :

$$\mathcal{I}_{ij} = \int_V \rho \left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{ij} - x_i x_j \right) \, dV. \quad (196)$$

Ce tenseur est symétrique et donc diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe des directions orthogonales appelées *axes d'inertie* dans lesquelles il s'écrit

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (197)$$

avec les moments d'inertie : $A = \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) \, dV$, $B = \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) \, dV$, $C = \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) \, dV$. Les équations du mouvement de rotation s'écrivent donc simplement dans un repère lié aux axes d'inertie, et les moments d'inertie sont les paramètres qui contrôlent la rotation d'un corps. La détermination des moments d'inertie des planètes passe donc par l'observation de leur rotation : précession, nutation, mouvement du pôle, librations pour la Lune etc.

Exercice : calculer les moments d'inertie d'une planète à symétrie sphérique.

7.2 Moments cinétiques dans le système solaire

Commençons par étudier numériquement les valeurs des moments cinétiques de rotation et de révolution dans le système solaire, avec les données ($I =$ inertie moyenne := $(A + B + C)/3$) suivantes :

40. Rappelons qu'un tenseur d'ordre 2 est une application linéaire qui à un vecteur associe un vecteur. Le point \cdot indique ici la position du vecteur de l'ensemble de départ. Ainsi, \mathcal{I} est le tenseur qui à $\vec{\omega}$ associe $\mathcal{I}\vec{\omega} = \int_V \rho \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) \, dV = \int_V \rho \left(GM^2 \vec{\omega} - \overrightarrow{GM} (\overrightarrow{GM} \cdot \vec{\omega}) \right) \, dV$. Le tenseur I_d est l'identité, de composantes cartésiennes δ_{ij} . Le tenseur $\vec{u} \otimes \vec{v}$ de composantes $u_i v_j$ est celui qui à un vecteur $\vec{\omega}$ associe $\vec{u} (\vec{v} \cdot \vec{\omega})$. Le tenseur d'inertie est aussi parfois écrit ainsi en tant que forme bilinéaire :

$$\mathcal{I} = - \int_V \rho (\overrightarrow{GM} \wedge \cdot) \cdot (\overrightarrow{GM} \wedge \cdot) \, dV. \quad (193)$$

41. Dans le cas le plus général où P est distinct de G : $\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}$ on obtient alors

$$\vec{H} = \mathcal{M} \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_P + \mathcal{M} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PG}) + \mathcal{I} \vec{\omega}, \quad (194)$$

avec \mathcal{I} centré autour de P : $\mathcal{I} = \int_V \rho \left(PM^2 I_d - \overrightarrow{PM} \otimes \overrightarrow{PM} \right) \, dV$, mais cette forme générale est rarement intéressante, et le tenseur d'inertie est le plus souvent défini par rapport à son centre de masse.

Planète	Masse \mathcal{M} (10^{24} kg)	Rayon R (km)	I/MR^2	Période de rotation	Distance au Soleil (10^6 km)
Soleil	$1,99 \cdot 10^6$	695000	0,059	25,4 j	0
Mercure	0,33	2440	0,33	59 j	58
Vénus	4,87	6052	0,33	-243 j	108
Terre	6,0	6371	0,33	23,9 h	150
Mars	0,64	3390	0,37	24,6 h	228
Jupiter	1900	70000	0,25	9,9 h	778
Saturne	570	58000	0,21	10,7 h	1427
Uranus	87	25000	0,23	17,2 h	2870
Neptune	102	25000	0,23	16,1 h	4497

Pour calculer le moment cinétique de rotation $\mathcal{I}\vec{\omega}$, on suppose que la rotation se fait sur l'axe du moment principal et que ce moment est proche du moment de la sphère équivalente C si bien que $\mathcal{I}\vec{\omega} = C\vec{\omega} = I\vec{\omega}$. Pour calculer le moment cinétique de révolution, on suppose que la révolution est circulaire à vitesse angulaire $\vec{\omega}_R$ si bien que $\mathcal{M}\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_G = \mathcal{M}d^2\vec{\omega}_R$ (avec $d \equiv AG$). Cette vitesse angulaire, égale à 2π sur la période de révolution, est donnée par la loi de Képler $G(\mathcal{M}_{\text{Soleil}} + \mathcal{M}_{\text{Planete}})/d^2 = \omega^2d$. On trouve alors :

Planète	Période révolution (j)	Moment rotation (10^{40} kg.m ² /s)	Moment révolution (10^{40} kg.m ² /s)	log{M.rot. /masse/ (m ² /s)}	log{M.rév. /masse/ (m ² /s)}
Soleil	0	16,3	0	10,91	-
Mercure	88,16	$8,02 \cdot 10^{-11}$	0,09	6,39	15,44
Vénus	224,01	$-1,77 \cdot 10^{-9}$	1,84	6,56	15,58
Terre	365,19	$5,87 \cdot 10^{-7}$	2,67	8,99	15,65
Mars	687,11	$1,93 \cdot 10^{-8}$	0,35	8,48	15,74
Jupiter	4331,04	$4,10 \cdot 10^{-2}$	1931,02	11,33	16,01
Saturne	10758,68	$6,57 \cdot 10^{-3}$	784,57	11,06	16,14
Uranus	30686,40	$1,27 \cdot 10^{-4}$	169,83	10,16	16,29
Neptune	60187,66	$1,59 \cdot 10^{-4}$	249,23	10,19	16,39

De façon générale, les moments de révolution sont bien plus importants que ceux de rotation. D'autre part, le Soleil représente plus de 99% de la masse du système solaire mais moins de 1% de son moment cinétique.

Quand on représente les moments de rotation par unité de masse en fonction des masses dans un diagramme log-log il semble y avoir un alignement. La droite $y = 0,25 \times 10^{-10} \mathcal{M}^{4/5}$ (en u.s.i.) fournit une loi empirique correcte. Cette corrélation provient probablement du fait que la rotation est acquise au moment de la formation par les impacts. La Terre se situe en dessous de cette loi probablement à cause du freinage de marée. Le point de la droite correspondant à la masse terrestre aurait une période de rotation de 14 h. Nous traiterons plus loin le moment du système Terre-Lune.

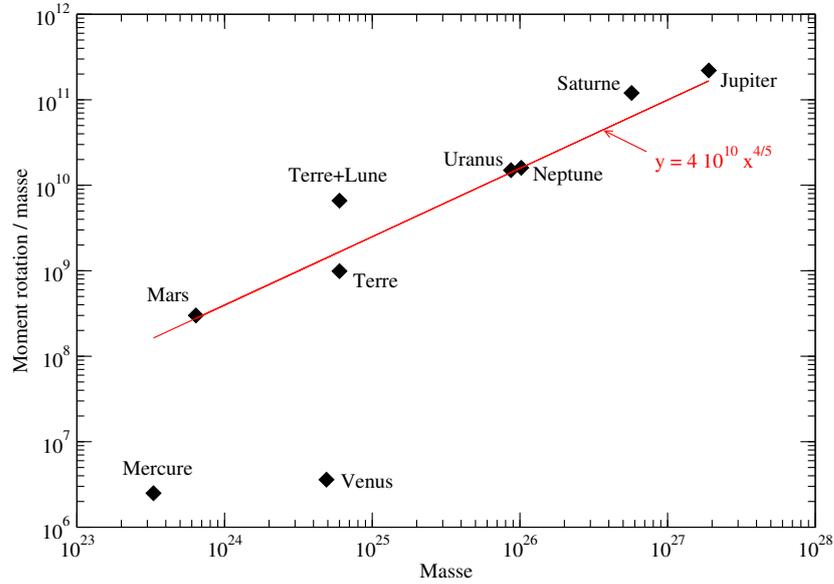


FIGURE 22 – Moments cinétiques massiques (en m^2/s) des planètes en fonction de leur masse (kg).

7.3 Moment cinétique du système Terre-Lune

Considérons le cas simple de la rotation axiale de la Terre. Supposons le système Terre-Lune isolé et notons G son centre de masse, T et L les centres de masse de la Terre et de la Lune considérée solides⁴². Les moments cinétiques de la Terre et de la Lune dans le référentiel galiléen centré en G s'écrivent alors, avec des notations évidentes :

$$\vec{H}_T = \mathcal{M}_T \overrightarrow{GT} \wedge \vec{v}_T + \mathcal{I}_T \vec{\omega}_T, \quad (198)$$

$$\vec{H}_L = \mathcal{M}_L \overrightarrow{GL} \wedge \vec{v}_L + \mathcal{I}_L \vec{\omega}_L. \quad (199)$$

Le système étant isolé, le moment cinétique total $\vec{H} := \vec{H}_T + \vec{H}_L$ est constant. D'autre part, G est centre de masse : $\mathcal{M}_T \overrightarrow{GT} + \mathcal{M}_L \overrightarrow{GL} = \vec{0}$ et peut, sans restriction, être considéré au repos donc $\frac{d}{dt} \overrightarrow{GT} = \vec{v}_T$ et $\frac{d}{dt} \overrightarrow{GL} = \vec{v}_L$, si bien que $\mathcal{M}_T \vec{v}_T + \mathcal{M}_L \vec{v}_L = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}_T \overrightarrow{GT} + \mathcal{M}_L \overrightarrow{GL}) = \vec{0}$. Ainsi, le moment peut se mettre sous la forme

$$\vec{H} = \mathcal{M}_L \overrightarrow{TL} \wedge \vec{v}_L + \mathcal{I}_T \vec{\omega}_T + \mathcal{I}_L \vec{\omega}_L. \quad (200)$$

Tout se passe donc, pour le moment cinétique de révolution du système, comme si la Lune tourne autour du centre de la Terre au repos avec toutefois la vitesse par rapport au centre de masse du système.

42. Par rapport au paragraphe précédent, le point de référence A arbitraire est choisi $=G$ le centre de masse du système, et le point G est choisi au centre de masse de la Lune ou du Soleil.

Décrivons le cas le plus simple de la révolution circulaire autour du centre de masse commun et de la rotation axiale autour de l'axe polaire d'inertie lui même perpendiculaire au plan de l'orbite⁴³. Dans ce cas :

$$\vec{v}_L = \vec{\omega}_R \wedge \vec{GL} \quad \vec{\omega}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_R \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_L \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_T \end{pmatrix} \quad (201)$$

avec ω_R la vitesse angulaire de révolution de la Lune. Puisque G est centre de masse du système, et d'après la forme de \mathcal{I} , il vient aisément sur la troisième composante :

$$H = \frac{\mathcal{M}_L}{1 + \mathcal{M}_L/\mathcal{M}_T} d^2 \omega_R + C_T \omega_T + C_L \omega_L \quad (202)$$

en notant $d = TL$. La masse, l'inertie, et la vitesse de rotation de la Terre, étant plus grandes que celle de la Lune on pourra approximer cette expression par :

$$H = \mathcal{M}_L d^2 \omega_R + C_T \omega_T. \quad (203)$$

A.N. : $GT = 4680$ km, $GL = 379000$ km, et donc :

$$\mathcal{M}_L d^2 \omega_R = 2,77.10^{34} \text{ kg.m}^2/\text{s},$$

$$C_T \omega_T = 5,87.10^{33} \text{ kg.m}^2/\text{s},$$

$$C_L \omega_L = 3,47.10^{32} \text{ kg.m}^2/\text{s},$$

$$H = 3,39.10^{34} \text{ kg.m}^2/\text{s},$$

$$H/\mathcal{M}_T = 5,6.10^9 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Sur le diagramme précédent, le système Terre-Lune se place au dessus de la droite. Si le moment cinétique du système Terre-Lune est entièrement attribué à la rotation diurne de la Terre alors la période de rotation correspondante est de 4 h. On peut en déduire une histoire (hypothétique ?) de la durée du jour : à l'origine la terre tournait en 14 h, un impact l'accélére jusqu'à une période de 4 h et détache la Lune, depuis le moment cinétique de la Terre diminue et est transféré à la Lune.

7.4 La rotation axiale ou durée du jour

Une diminution de la vitesse de rotation terrestre induit donc une augmentation du moment cinétique de révolution lunaire. La durée du jour terrestre diminuant d'environ 1,7 ms par siècle⁴⁴, à quel éloignement lunaire

43. En réalité, le vecteur rotation fait un angle de $\varepsilon = 23^\circ$ avec cette perpendiculaire. Il faudrait donc projeter les équations sur deux axes. Dans les équations qui suivent il faut donc multiplier les termes en C_T par $\cos \varepsilon$, mais aussi écrire la projection sur le plan de l'orbite, qui fournit l'équation supplémentaire $C_T \omega_T \sin \varepsilon = \text{cste}$. Ceci indique que lorsque ω_T était 3 fois plus faible, alors ε valait $7,5^\circ$.

44. $\frac{d\omega}{dt} = (-4,5 \pm 0,1).10^{-22} \text{ rad.s}^{-2}$. Sur ces -4,5 la marée lunaire est à la source de -6,1. Il existe donc une accélération hors marées de +1,6. Cf. Groten, E., 2004, Fundamental Parameters and current (2004) best estimates of the parameters of common relevance to Astronomy, Geodesy and Geodynamics, J. Geodesy?, DOI 10.1007/s00190-003-0373-y.

cela correspond-t-il ?

On utilise, pour le déterminer, la constance du moment cinétique :

$$\dot{H} = \mathcal{M}_L(d^2\omega_R) + C_T\dot{\omega}_T = 0 \quad (204)$$

et l'équilibre gravitationnel Terre-Lune :

$$\frac{G\mathcal{M}_T}{d^2} = \omega_R^2 d. \quad (205)$$

En injectant la deuxième relation dans la première, on trouve

$$\mathcal{M}_L(\sqrt{G\mathcal{M}_T d}) + C_T\dot{\omega}_T = 0 \quad (206)$$

soit

$$-\frac{1}{2}\dot{d}\mathcal{M}_L\sqrt{\frac{G\mathcal{M}_T}{d}} = C_T\dot{\omega}_T \quad (207)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\dot{d}}{d} = -2\frac{C_T}{\mathcal{M}_L d^2} \frac{\dot{\omega}_T}{\omega_R} = 2\frac{C_T}{\mathcal{M}_T R^2} \frac{\mathcal{M}_T}{\mathcal{M}_L} \left(\frac{R}{d}\right)^2 \frac{\dot{T}_T}{T_T} \frac{T_L}{T_T}. \quad (208)$$

La Lune s'éloigne donc (\dot{T} et $\dot{d} > 0$). A.N. :

$$\frac{\dot{d}}{d} = 2 \times 0,33 \times 81 \times \frac{1}{60^2} \times 1,7 \text{ ms/siecle/j} \times 27 \text{ j} = 7,9 \cdot 10^{-11} \text{ an}^{-1} \quad (209)$$

soit $\dot{d} = 3,0 \text{ cm/an}$. Cela correspond à la mesure directe par télémétrie laser-Lune⁴⁵.

7.5 Energie cinétique de rotation

Pour un corps solide de masse \mathcal{M} , de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}$, son énergie cinétique se sépare aussi en une énergie de translation et une de rotation⁴⁶ :

$$E_c = \frac{1}{2}\mathcal{M}v_G^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{I}\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}. \quad (210)$$

Si la rotation se fait autour de l'axe principal de moment C l'énergie cinétique de rotation s'écrit alors simplement :

$$E_c = \frac{1}{2}C\omega^2. \quad (211)$$

45. La mesure exacte est de 3,8 cm; cf <http://en.wikipedia.org/wiki/Moon>. C'est que, comme on l'a dit dans la note au-dessus, l'effet de marée est plus important que l'effet total mesurée. En ne considérant que le ralentissement dû à la marée $d\omega/dt = -6,1 \cdot 10^{-22} \text{ rad.s}^{-2}$, on trouve $\dot{d} = 4,1 \text{ cm/an}$. [pas clair!, pourquoi mesure-t-on 3,8 et pas 3?]

46. Pour le montrer, il suffit de remplacer la forme donnée de \vec{v} dans $E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV$, et d'utiliser éventuellement la relation vectorielle $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

Pour la Terre, en dérivant cette relation on obtient la puissance dissipée par les marées :

$$\dot{E}_c = C_T \dot{\omega}_T \omega_T = 3,2 \text{ TW} \quad (212)$$

car $C_T = 0,33 M_T R^2 = 8,03 \cdot 10^{37} \text{ kg.m}^2$ et $\dot{\omega}_T / \omega_T = -\dot{T}_T / T_T = 2 \text{ ms/siècle/j} = -7,4 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Ces 3,2 TW se dissipent essentiellement dans les océans, sur les plateaux continentaux, où les courants sont plus forts, et ne sont pas comptabilisés dans les 46 TW évacués de la Terre *solide*. D'après l'analyse alti-gravimétrique de Rey et al. (2001) seuls 0,1 TW de ces 3,2 sont dissipés dans la Terre solide.

Exercice : pour que le calcul soit complet, il faut calculer la variation des énergies cinétique de révolution et potentielle du système et les comparer à la variation d'énergie cinétique de rotation.

Mouvements de l'axe

Nous avons considéré jusqu'ici les rotations autour d'un axe fixe. En fait, l'axe de rotation terrestre varie dans la Terre (mouvement du pôle) et dans l'espace (précession-nutation). C'est ce que nous allons étudier maintenant.

7.6 Systèmes d'axes

Afin d'étudier la rotation de la Terre, il faut considérer deux référentiels centrés au centre de masse O de la Terre (point appelé T jusqu'à présent). Le premier référentiel a des axes de directions fixes, c'est le référentiel géocentrique que nous noterons par ses axes $Oabc$ (cf. fig. 23 et partie 1.6). Le second est lié à la Terre, c'est le référentiel terrestre, et que nous noterons ici $Ox'y'z$. Si la Terre est indéformable il suffit d'attacher ce référentiel à des directions fixes quelconques dans la Terre. Si la Terre est déformable cette définition est vague et sera précisée plus loin : on prendra par exemple Oz comme l'axe d'inertie polaire et Ox' et Oy' comme les axes d'inertie équatoriaux⁴⁷ ; un choix plus courant est de prendre le référentiel dit de *Tisserand* dans lequel le moment cinétique du manteau reste nul.

Considérons, pour simplifier, le système Terre-Lune comme isolé et que les seules forces sont celles d'attraction de la Terre et de la Lune. Dans ce cas, le référentiel centré au centre de masse du système Terre-Lune peut être considéré comme galiléen : nous le noterons R comme le référentiel de Copernic.

Nous considérerons également un système d'axes intermédiaires $Oxyz$ où Ox est défini par l'intersection du plan équatorial et du plan Oab . Notons $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de $Ox'y'z$ dans le référentiel géocentrique, que l'on pourrait qualifier de rotation totale de la Terre, par opposition au vecteur rotation axiale de la Terre que nous noterons $\vec{\Omega}$ et qui est le vecteur rotation

47. Le tenseur d'inertie sera défini un peu plus loin.

de $\vec{\omega}$ dans l'espace⁴⁹. Dans le premier cas on parle de *mouvement du pôle* car on appelle *pôle de rotation* l'intersection de la direction de $\vec{\omega}$ avec la surface de la Terre. Dans le deuxième cas on parle de *précession* et de *nutation*. Les deux façons de voir sont évidemment dépendantes. Nous verrons comment à l'aide des angles d'Euler.

7.7 Angles d'Euler

La position des axes liés à la Terre dans l'espace peut être entièrement paramétrée par trois angles $\psi, \varepsilon, \varphi$ (fig. 23), que l'on appelle *angles d'Euler*⁵⁰. Ils décrivent respectivement les rotations du trièdre $Ox'y'z$ autour de Oc , Ox et Oz . On peut donc relier leur variation au vecteur rotation. Avec une notation évidente pour les vecteurs unitaires, et un point $\dot{}$ pour la dérivée temporelle, cela s'écrit :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_c + \dot{\varepsilon} \vec{e}_x + \dot{\varphi} \vec{e}_z. \quad (214)$$

Or avec

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_{x'} - \sin \varphi \vec{e}_{y'}, \quad (215)$$

$$\vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_{x'} + \cos \varphi \vec{e}_{y'}, \quad (216)$$

$$\vec{e}_c = \sin \varepsilon \vec{e}_y + \cos \varepsilon \vec{e}_z = \sin \varepsilon \sin \varphi \vec{e}_{x'} + \sin \varepsilon \cos \varphi \vec{e}_{y'} + \cos \varepsilon \vec{e}_z, \quad (217)$$

on peut écrire $\vec{\omega}$ dans les deux autres bases :

$$\vec{\omega} = \dot{\varepsilon} \vec{e}_x + \sin \varepsilon \dot{\psi} \vec{e}_y + (\cos \varepsilon \dot{\psi} + \dot{\varphi}) \vec{e}_z \quad (218)$$

$$= (\sin \varepsilon \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\varepsilon}) \vec{e}_{x'}$$

$$+ (\sin \varepsilon \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\varepsilon}) \vec{e}_{y'} + (\cos \varepsilon \dot{\psi} + \dot{\varphi}) \vec{e}_z \quad (219)$$

Ces équations décrivent la relation entre le vecteur rotation dans la Terre et l'orientation de ses axes dans l'espace : mouvement du pôle et précession-nutation sont les mêmes phénomènes vus de deux façons différentes.

49. C'est-à-dire de $Ox'y'z$ dans $Oabc$

50. Le deuxième angle est noté θ dans la plupart des livres de mécanique ; nous adoptons ici l'usage en astronomie consistant à le noter ε .

7.8 Questions de vocabulaire : précession et mouvement du pôle

Le vocabulaire fluctue suivant les communautés et le temps, notamment en ce qui concerne la précession, la nutation... En mécanique du solide $\psi, \varepsilon, \varphi$ sont appelés *angles de précession, nutation* et *rotation propre*. En astronomie, le terme de *précession* est réservé aux variations séculaires de ψ , et celui de *nutation* aux variations périodiques de ψ et ε . La variation de φ est quant à elle liée à la *durée du jour*.

Il faut remarquer par ailleurs que la Terre possède différentes précessions et mouvements du pôle, essentiellement de deux types. Le premier correspond à un mode de rotation libre appelé *mode de Chandler*; le mouvement du pôle correspondant à une période de 435 jours⁵¹ et sa précession est donc d'environ 24 h. Le second est un mouvement forcé par les marées luni-solaires; sa précession se fait en 26000 ans et le mouvement du pôle est donc d'environ 24 h. Du fait de ces différences de périodes et des différences d'amplitudes correspondantes⁵², le mode de Chandler est observable essentiellement dans le repère terrestre, c'est-à-dire par la position du pôle de rotation dans le repère terrestre, alors que le mouvement forcé est observable essentiellement dans l'espace, c'est-à-dire par le mouvement de l'axe Oz dans le référentiel géocentrique. Il est donc d'usage d'utiliser le terme de *mouvement du pôle* pour les modes à longue période dans le référentiel terrestre (435 j), et de réserver les termes de *précession* et *nutation* pour les mouvements forcés à longue période dans le référentiel spatial⁵³.

7.9 Théorème du moment cinétique

Ce théorème a été donné dans le référentiel galiléen où il s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{\text{Galileen}} = \vec{C}(\vec{f}) \quad (220)$$

où $\vec{C}(\vec{f})$ représente le couple des forces extérieures. Dans un référentiel non galiléen, ce théorème reste valable à condition de considérer les forces inertielles :

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{\text{Non galileen}} = \vec{C}(\vec{f} + \vec{f}_{\text{inertielles}}) \quad (221)$$

Dans le référentiel géocentrique notamment, nous pouvons écrire :

$$\left. \frac{d\vec{H}}{dt} \right|_{abc} = \vec{C}(\vec{f}_{\text{marees}}) \quad (222)$$

51. http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/earthor/polmot/pm_fr.html.

52. P.ex. l'amplitude du mouvement du pôle du premier est d'un ordre de grandeur supérieur à celui du second.

53. Évidemment ce n'est pas tout à fait vrai, surtout depuis que l'on a mesuré, avec des gyro-lasers, le mouvement du pôle lié « à la précession »; cf. partie précession. Mais pour avoir une idée de la différence de difficulté de mesure, il faut savoir que la précession dans l'espace est quant à elle connue depuis l'antiquité.

où le moment cinétique et le moment des forces sont définis par :

$$\vec{H} = \int_V \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \, dV \quad \vec{C}(\vec{f}_{\text{marees}}) = \int_V \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{\text{marees}} \, dV, \quad (223)$$

En effet, dans ce référentiel non tournant, la seule force inertielle à considérer est celle liée à l'accélération du centre, et \vec{f}_{marees} représente donc ici les forces de marées.

Par contre, la dérivée du moment cinétique est plus facilement exprimable dans le repère terrestre (cf. partie 7.1). On utilise donc la propriété (34) : $\frac{d\vec{H}}{dt} \Big|_{abc} = \frac{d\vec{H}}{dt} \Big|_{x'y'z} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}$ pour écrire le théorème du moment cinétique dans le référentiel terrestre⁵⁴ :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} \Big|_{x'y'z} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{C} \quad (224)$$

où \vec{C} est toujours le couple des forces de marée. Afin de simplifier les calculs de la précession, nous serons également amenés à exprimer la variation de moment cinétique dans le référentiel $Oxyz$:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} \Big|_{xyz} + (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) \wedge \vec{H} = \vec{C}. \quad (225)$$

7.10 Équations d'Euler

Considérons, pour simplifier, la Terre solide, c'est-à-dire indéformable. On a vu qu'alors dans un repère lié à la Terre le moment cinétique prend la forme simple

$$\vec{H} = \mathcal{I}\vec{\omega} \quad (226)$$

où \mathcal{I} est le tenseur d'inertie constant, dont nous noterons A, B, C les moments principaux. En prenant $Ox'y'z$ sur les directions principales d'inertie, le moment cinétique s'écrit alors simplement dans $Ox'y'z$ [notations : 123 = $x'y'z'$, mais il faudrait probablement que je choisisse entre les deux, et peut-être que j'échange $x'y'z'$ et xyz]

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix}. \quad (227)$$

En notant $(C_{x'}, C_{y'}, C_z)$ les composantes cartésiennes de \vec{C} dans $x'y'z$, le théorème du moment cinétique s'écrit donc (eq. 224) :

$$A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = C_{x'} \quad (228)$$

54. Le couple \vec{C} est celui des forces qui s'exercent dans le référentiel $Oabc$ et nous exprimerons ses composantes cartésiennes dans le repère $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z$.

$$B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = C_{y'} \quad (229)$$

$$C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = C_z. \quad (230)$$

Ce sont les trois équations d'Euler décrivant la rotation d'un corps solide autour de son centre de masse.

7.11 Le mouvement libre ou *mode d'Euler*

Cherchons tout d'abord les solutions sans second membre, c'est-à-dire sans forces extérieures, solutions appelées *modes propres* : $C_{x'} = C_{y'} = C_z = 0$. Supposons pour cela la Terre à symétrie de révolution autour de l'axe Oz , alors $A = B$. La dernière relation s'écrit $\omega_3 = \text{cste}$. Notons Ω cette rotation autour de l'axe de symétrie : il s'agit de la rotation diurne de la Terre qui est donc constante. Les deux autres relations s'écrivent alors simplement

$$\dot{\omega}_1 + \frac{C - A}{A}\Omega\omega_2 = 0 \quad (231)$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{C - A}{A}\Omega\omega_1 = 0. \quad (232)$$

En dérivant l'une et reportant dans l'autre

$$\ddot{\omega}_1 + \left(\frac{C - A}{A}\Omega\right)^2 \omega_1 = 0 \quad (233)$$

on obtient la solution générale :

$$\omega_1 = \omega_0 \cos\left(\frac{C - A}{A}\Omega t + \phi\right) \quad (234)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sin\left(\frac{C - A}{A}\Omega t + \phi\right) \quad (235)$$

avec ω_0 et ϕ deux constantes. Le vecteur $(\omega_1, \omega_2, 0)$ tourne donc autour de l'axe Oz avec une pulsation $\frac{C-A}{A}\Omega$, c'est-à-dire une période de un jour divisé par $\frac{C-A}{A}$. Le vecteur rotation $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \Omega)$ décrit ainsi un cône d'angle $\alpha_0 = \arctg(\omega_0/\Omega)$ autour de l'axe d'inertie Oz (fig. 24). Le pôle de rotation décrit un cercle prograde (c.-à-d. dans le même sens que Ω) autour de l'axe d'inertie.

Le rayon de ce cercle est déterminé par les forces excitatrices de ce mouvement ; l'observation montre qu'il est d'environ 7 m maximum à la surface de la Terre. Pour la Terre $\frac{C-A}{A} \approx 1/304$, la période serait donc de 304 jours

pour une Terre indéformable. L'observation du mouvement du pôle fait ressortir clairement deux périodes, 365 et 435 jours. La première est un mouvement forcé par le Soleil et lié aux transferts de moment cinétique entre la Terre solide et l'atmosphère dont les mouvements moyens diffèrent entre l'été et l'hiver. La seconde période, dite *période de Chandler*, correspond au mode propre que nous venons de calculer ; ce sont les déformations élastiques de la Terre et les déformations océaniques, ignorées dans notre calcul, qui font passer la période de 305 à 435 jours.

Prévu par Euler, le mouvement du pôle a été observé par Chandler en 1891 avec une période de 427 jours. Quatre mois plus tard, Newcomb explique une partie du décalage entre cette valeur et la prédiction basée sur la théorie d'Euler par « la prise en compte de l'élasticité de la Terre elle-même, et de la mobilité des océans. » En réalité, Newcomb n'avait pas parfaitement tenu compte des océans et trouvait 443 jours. Il fallu attendre 1976 pour que Dahlen⁵⁵ détermine la correction océanique faisant passer la période de 407 (Terre élastique) à 435 jours (Terre élastique + océans). [Ajouter noyau - 51 jours, anélasticité qq jours].

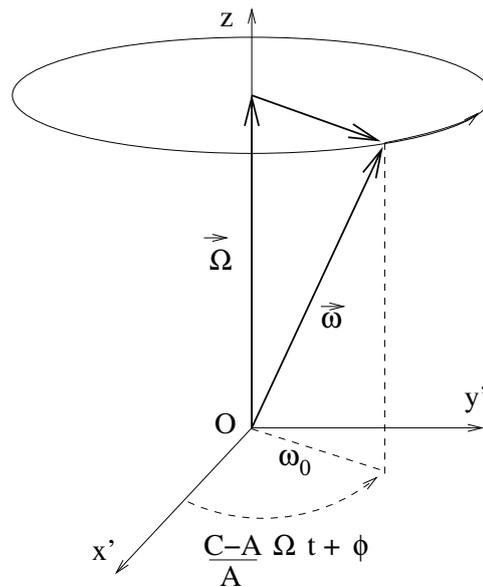


FIGURE 24 – *Mouvement du pôle.*

Dans l'espace

Cherchons la rotation propre, la nutation et la précession associées au mouvement du pôle. Il faut pour cela introduire les angles d'Euler (eq. 219) :

$$\omega_0 \cos \left(\frac{C-A}{A} \Omega t + \phi \right) = \sin \varepsilon \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\varepsilon} \quad (236)$$

55. Dahlen, F. A., 1976, The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth, Geophys. J. R. astr. Soc., 46, 363-406.

$$\omega_0 \sin \left(\frac{C-A}{A} \Omega t + \phi \right) = \sin \varepsilon \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\varepsilon} \quad (237)$$

$$\Omega = \cos \varepsilon \dot{\psi} + \dot{\varphi}. \quad (238)$$

Une combinaison des deux premières indique que :

$$\dot{\varepsilon} = \omega_0 \cos \left(\frac{C-A}{A} \Omega t + \phi + \varphi \right) \quad (239)$$

$$\sin \varepsilon \dot{\psi} = \omega_0 \sin \left(\frac{C-A}{A} \Omega t + \phi + \varphi \right) \quad (240)$$

$$\dot{\varphi} = \Omega - \cos \varepsilon \dot{\psi}, \quad (241)$$

système d'équations non linéaires que je ne sais pas résoudre. Il est préférable de procéder différemment, en choisissant judicieusement les axes fixes. En remarquant que dans le référentiel géocentrique, $d\vec{H}/dt = 0$, c'est à dire que \vec{H} est constant dans ce référentiel, on peut le choisir sur l'axe Oc : $\vec{H} = H\vec{e}_c$. Ce choix simplifie effectivement beaucoup les équations. En effet, $\mathcal{I}\vec{\omega} = \vec{H}$ s'écrit alors, grâce la deuxième égalité de (217), dans le repère $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$:

$$A\omega_1 = H \sin \varepsilon \sin \varphi, \quad (242)$$

$$A\omega_2 = H \sin \varepsilon \cos \varphi, \quad (243)$$

$$C\omega_3 = H \cos \varepsilon. \quad (244)$$

Les équations d'Euler nous ont donné $\omega_3 = \text{cste} = \Omega$, donc la dernière relation nous indique que $\varepsilon = \text{cste}$ et que $H = C\Omega / \cos \varepsilon$. On peut alors, soit utiliser la relation (219) pour écrire les relations précédentes sous la forme :

$$A \sin \varepsilon \sin \varphi \dot{\psi} = H \sin \varepsilon \sin \varphi, \quad (245)$$

$$A \sin \varepsilon \cos \varphi \dot{\psi} = H \sin \varepsilon \cos \varphi. \quad (246)$$

$$\Omega = \cos \varepsilon \dot{\psi} + \dot{\varphi}, \quad (247)$$

soit utiliser $\varepsilon = \text{cste}$ dans les relations (239)-(241). Par les deux méthodes, la solution est $\dot{\psi} = H/A = \text{cste}$, $\dot{\varphi} = \Omega - \cos \varepsilon H/A = \Omega - \Omega C/A$; en choisissant convenablement l'origine des temps la solution s'écrit donc :

$$\varepsilon = \text{cste} = \varepsilon_0 \quad (248)$$

$$\psi = \frac{H}{A} t = \frac{C}{A} \frac{\Omega}{\cos \varepsilon_0} t \quad (249)$$

$$\varphi = -\frac{C-A}{A} \Omega t \quad (250)$$

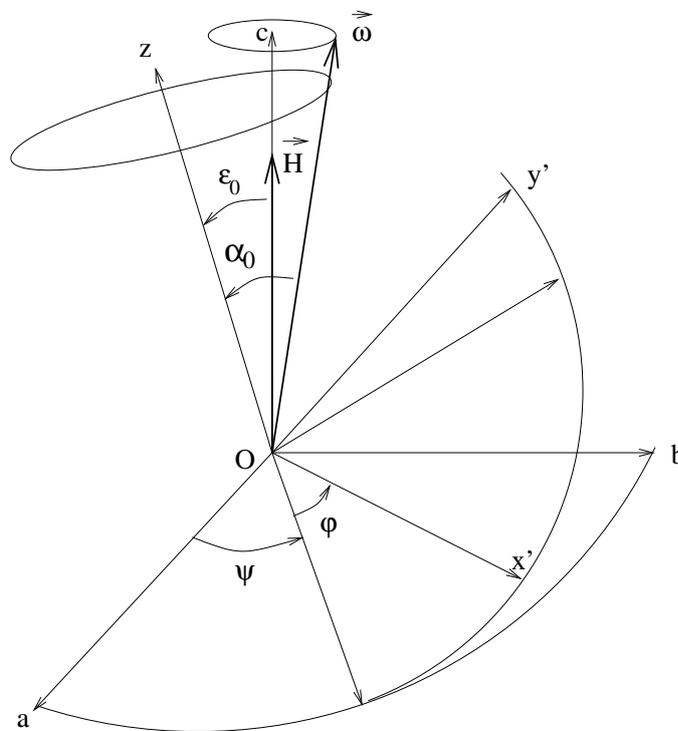


FIGURE 25 – *Précession libre. L'axe de rotation $\vec{\omega}$ tourne autour de l'axe d'inertie Oz , en 305 jours et sur un cercle de 15 m de diamètre au Pôle dans le référentiel terrestre. Il tourne autour de l'axe inertiel Oc en un jour sidéral avec un angle 304 fois [ou 305 ?] plus faible (3 cm au Pôle).*

Les constantes ω_0 et ε_0 sont liées entre elles : la norme de (ω_1, ω_2) s'écrit en effet, d'après (236)-(237) : $\omega_0 = \sin \varepsilon \dot{\psi} = \tan \varepsilon_0 \frac{C}{A} \Omega$. On peut donc relier l'angle aux pôles avec l'obliquité par :

$$\tan \alpha_0 = \frac{C}{A} \tan \varepsilon_0. \quad (251)$$

Les deux angles ont donc le même ordre de grandeur, qui dans la pratique est d'environ $5 \text{ m}/6000 \text{ km} = 10^{-6} \text{ rad}$. α_0 . Par contre, la différence des deux

angles, qui est l'angle entre le pôle de rotation et un axe fixe est extrêmement petite, 300 fois plus petite que ε_0 et est donc difficilement mesurable. De plus il est constant et s'ajoute donc à la précession forcée. [parler du mouvement elliptique]

En définitive, pour un corps à symétrie de révolution :

- il n'y a pas de nutation ($\varepsilon = \text{cste} = \varepsilon_0$),
- l'amplitude ε_0 dépend des sources d'excitations du mode et est déterminé par l'observation,
- dans le référentiel terrestre, l'axe de rotation $\vec{\omega}$ parcourt un grand cône fixe, dont l'axe est l'axe d'inertie \vec{e}_z , à vitesse $(C - A)/A\Omega$,
- dans le référentiel galiléen, $\vec{\omega}$ parcourt un petit cône fixe, dont l'axe est $\vec{H} = H\vec{e}_c$, à vitesse quasi-diurne,
- tout se résume au théorème dit de Euler : le petit cône roule sans glisser dans le grand,
- les vecteurs \vec{e}_z , \vec{H} et $\vec{\omega}$, sont coplanaires et orientés dans cet ordre,
- l'angle du grand cône est ε_0 ,
- l'angle au sommet du petit cône, $\alpha_0 - \varepsilon_0$, est environ $(C - A)/A$ fois plus petit,
- le grand cône tourne $A/(C - A)$ fois moins vite que le petit (304 j contre 1 j).
- dans le référentiel galiléen, il y a un troisième cône non dessiné : le parcours de l'axe d'inertie \vec{e}_z autour de \vec{e}_c .

7.12 La précession-nutation forcée

Étudions maintenant les solutions forcées des équations d'Euler (eq. 230). Le système Terre-Lune est toujours supposé isolé et la Terre rigide. Nous noterons $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes de $\vec{\omega}$ dans le repère considéré, introduisons pour la rotation diurne la notation $\Omega = \omega_3$ et remarquons par ailleurs que $\Omega \gg \omega_1, \omega_2$. Nous supposons que la Terre possède une symétrie de révolution autour de l'axe polaire d'inertie ($A = B$).

Il est possible de continuer à faire les calculs dans le repère $Ox'y'z$. Cela a le mérite de la cohérence mais n'est pas le plus simple. Utiliser le repère $Oxyz$ est le plus usuel car il conduit aux calculs les plus rapides. Faisons les deux .

Dans le repère $Ox'y'z$

Dans ce référentiel et ce repère, les équations d'Euler ont déjà été formulées, il s'agit des relations (230). Il reste à remplacer les composantes de $\vec{\omega}$ par les variations des angles d'Euler à l'aide de la relation (219). L'observation montre que les angles varient lentement si bien que $\dot{\psi}, \dot{\varepsilon} \ll \dot{\varphi} \simeq \Omega$. Au premier ordre les dérivées des ω_i ne font donc intervenir que $\dot{\varphi}$. Cela s'écrit :

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\varphi}\omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = -\dot{\varphi}\omega_1 \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_3 = \dot{\varphi}. \quad (252)$$

Dans les équations d'Euler, Ω est alors en facteur et des termes se simplifient, si bien que les équations d'Euler s'écrivent :

$$C\Omega\omega_2 = C_{x'} \quad (253)$$

$$-C\Omega\omega_1 = C_{y'} \quad (254)$$

$$C\dot{\Omega} = C_z. \quad (255)$$

c'est-à-dire :

$$C\Omega \left(\sin \varepsilon \cos \varphi \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\varepsilon} \right) = C_{x'} \quad (256)$$

$$-C\Omega \left(\sin \varepsilon \sin \varphi \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\varepsilon} \right) = C_{y'} \quad (257)$$

$$C\dot{\Omega} = C_z. \quad (258)$$

Dans le repère $Oxyz$

Même si la Terre tourne dans ce référentiel $Oxyz$, nous pouvons toujours considérer l'inertie constante puisque la Terre est supposée à symétrie de révolution autour de l'axe de rotation. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors comme l'éq. (225), le moment cinétique de la Terre faisant toujours intervenir la rotation totale $\vec{\omega}$ c'à-d. : $\vec{H} = \mathcal{I}\vec{\omega}$. En composantes :

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z + B\omega_y\Omega = C_x \quad (259)$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z - A\omega_x\Omega = C_y \quad (260)$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = C_z. \quad (261)$$

Cette fois, les ω_i désignent les composantes de $\vec{\omega}$ dans $Oxyz$ et sont donnés par (eq. 218) :

$$\omega_x = \dot{\varepsilon}, \quad \omega_y = \sin \varepsilon \dot{\psi}, \quad \omega_z = \cos \varepsilon \dot{\psi} + \dot{\varphi}. \quad (262)$$

Remarquons que pour la précession $\dot{\psi} \ll \dot{\varphi}$, donc $\omega_z \approx \Omega$ avec une très bonne approximation. Avec l'hypothèse de symétrie de révolution, le système se réduit alors à :

$$A\dot{\omega}_1 + C\Omega\omega_2 = C_x \quad (263)$$

$$A\dot{\omega}_2 - C\Omega\omega_1 = C_y \quad (264)$$

$$C\dot{\Omega} = C_z. \quad (265)$$

L'observation montre que ces angles varient lentement, si bien qu'au premier ordre les équations d'Euler ci-dessus s'expriment par :

$$C\Omega \sin \varepsilon \dot{\psi} = C_x \quad (266)$$

$$-C\Omega \dot{\varepsilon} = C_y \quad (267)$$

$$C\dot{\Omega} = C_z. \quad (268)$$

Il s'agit bien des relations (258) dans $Oxyz$ puisque $C_x = \cos \varphi C_{x'} - \sin \varphi C_{y'}$ et $C_y = \sin \varphi C_{x'} + \cos \varphi C_{y'}$.

Couple de forces

Reste à calculer le couple de forces :

$$\vec{c} = \int_V \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{g}_L^m(M) dV. \quad (269)$$

La partie constante de $\vec{g}_L^m(M)$ n'exerce aucun couple donc

$$\vec{c} = \int_V \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{g}_L(M) dV. \quad (270)$$

Supposons la Lune à symétrie sphérique, alors $\vec{g}_L(M) = GM_L \frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3}$. Or $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{OL} \wedge \overrightarrow{ML}$ et le terme \overrightarrow{OL} peut être sorti de l'intégrale donc :

$$\vec{c} = \mathcal{M}_L \overrightarrow{OL} \wedge \int_V G\rho \frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} dV. \quad (271)$$

On reconnaît dans l'intégrale l'opposée de l'attraction terrestre en L donc :

$$\vec{c} = -\mathcal{M}_L \overrightarrow{OL} \wedge \vec{g}_T(L) \quad (272)$$

Si la Terre est à symétrie sphérique $\vec{g}_T(L)$ est colinéaire à \overrightarrow{OL} et ce couple est nul : l'axe de rotation est immobile dans l'espace.

La gravité terrestre dérive en effet d'un potentiel, $\vec{g}_T = \vec{\text{grad}}\phi$, avec en première approximation :

$$\phi = \frac{GM_T}{r} \left(1 - \frac{C - A}{\mathcal{M}_T r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) = \frac{GM_T}{r} - G \frac{C - A}{r^5} \frac{3z^2 - r^2}{2} \quad (273)$$

où r et θ sont les coordonnées sphériques terrestres. Le vecteur \vec{OL} est radial donc $\vec{OL} \wedge \vec{g}_T(L)$ ne fait intervenir que les composantes de la gravité sur Oz soit⁵⁶ :

$$\vec{OL} \wedge \vec{g}_T(L) = \vec{OL} \wedge \vec{e}_z \partial_z \phi \quad (282)$$

Or en $r = d$:

$$\partial_z \phi = -G \frac{C - A}{d^5} 3z \quad (283)$$

et puisque $z = \vec{OL} \cdot \vec{e}_z$ il vient donc :

$$\vec{C} = 3G\mathcal{M}_L \frac{C - A}{d^5} (\vec{OL} \cdot \vec{e}_z) \vec{OL} \wedge \vec{e}_z \quad (284)$$

56. À partir de l'éq. (269), on aurait pu aussi utiliser l'expression (85) :

$$\vec{g}_L^m(M) = \frac{G\mathcal{M}_L}{OL^3} \left(3 \frac{\vec{OL} \cdot \vec{OM}}{OL^2} \vec{OL} - \vec{OM} \right), \quad (274)$$

pour obtenir immédiatement :

$$\vec{C} = 3 \frac{G\mathcal{M}_L}{OL^5} \int_V \rho (\vec{OM} \wedge \vec{OL}) (\vec{OL} \cdot \vec{OM}) dV \quad (275)$$

$$= -3 \frac{G\mathcal{M}_L}{OL^5} \vec{OL} \wedge \left(\left(\int_V \rho \vec{OM} \otimes \vec{OM} dV \right) \vec{OL} \right) \quad (276)$$

Dans l'intégrale, on reconnaît le tenseur d'inertie à sa composante isotrope près. Puisque $\vec{OL} \wedge (\mathbf{I}_d(\vec{OL})) = \vec{0}$, cette partie isotrope a une contribution nulle dans la dernière expression. On obtient ainsi une expression fort compacte du couple (en notant $\vec{r} = \vec{OL}$) :

$$\vec{C} = \frac{3G\mathcal{M}_L}{r^5} \vec{r} \wedge (\mathcal{I}\vec{r}). \quad (277)$$

Cette expression montre immédiatement qu'il n'y a pas de couple si l'astre attirant est sur un axe d'inertie (évident par symétrie). À noter qu'en plus, ici, on n'a pas supposé la symétrie de révolution.

On aurait pu aussi utiliser le développement du potentiel en multipôles jusqu'au terme de degré 2 :

$$\phi = \frac{G\mathcal{M}_T}{r} - \frac{3G}{2r^5} \left(\left(\mathcal{I} - \frac{\text{tr}\mathcal{I}}{3} \mathbf{I}_d \right) \vec{r} \right) \cdot \vec{r} \quad (278)$$

d'où

$$\vec{g} = -\frac{G\mathcal{M}_T}{r^3} \vec{r} + \frac{3G}{r^5} \left(\mathcal{I} - \frac{\text{tr}\mathcal{I}}{3} \mathbf{I}_d \right) \vec{r}, \quad (279)$$

ce qui permet aussi d'arriver à l'éq. (277).

En notant toujours $\vec{r} = (x, y, z)$ et en développant le produit vectoriel de l'éq. (277), on obtient en toute généralité :

$$\vec{r} \wedge (\mathcal{I}\vec{r}) = (C - B) yz \vec{e}_x + (A - C) xz \vec{e}_y + (B - A) xy \vec{e}_z. \quad (280)$$

Dans le cas particulier où $A = B$, on retrouve

$$\vec{r} \wedge (\mathcal{I}\vec{r}) = (C - A) z (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y) = (C - A) (\vec{r} \cdot \vec{e}_z) (\vec{r} \wedge \vec{e}_z). \quad (281)$$

Notons toujours d la distance Terre-Lune, et λ la longitude de la Lune en la supposant dans le plan $Oabc$. Alors :

$$\overrightarrow{OL} = d \{ \cos \lambda \vec{e}_a + \sin \lambda \vec{e}_b \} = d \{ \cos(\lambda - \psi) \vec{e}_x + \sin(\lambda - \psi) \vec{e}_y \} \quad (285)$$

$$= d \{ \cos(\lambda - \psi) \vec{e}_x + \sin(\lambda - \psi) \cos \varepsilon \vec{e}_y - \sin(\lambda - \psi) \sin \varepsilon \vec{e}_z \} \quad (286)$$

A l'aide de ces expressions, on calcule aisément les produits vectoriel et scalaire :

$$\overrightarrow{OL} \cdot \vec{e}_z = -d \sin(\lambda - \psi) \sin \varepsilon \quad (287)$$

$$\overrightarrow{OL} \wedge \vec{e}_z = d \{ \sin(\lambda - \psi) \cos \varepsilon \vec{e}_x - \cos(\lambda - \psi) \vec{e}_y \} \quad (288)$$

et donc en définitive :

$$\vec{C} = 3GM_L \frac{C - A}{d^3} \sin(\lambda - \psi) \sin \varepsilon \{ -\sin(\lambda - \psi) \cos \varepsilon \vec{e}_x + \cos(\lambda - \psi) \vec{e}_y \}. \quad (289)$$

Les équations d'Euler (266-268) donnent donc :

$$C\Omega \dot{\psi} = -3GM_L \frac{C - A}{d^3} \sin^2(\lambda - \psi) \cos \varepsilon \quad (290)$$

$$C\Omega \dot{\varepsilon} = -3GM_L \frac{C - A}{d^3} \sin(\lambda - \psi) \sin \varepsilon \cos(\lambda - \psi) \quad (291)$$

$$\dot{\Omega} = 0, \quad (292)$$

soit⁵⁷ :

$$\dot{\psi} = -\frac{3GM_L}{2} \frac{C - A}{\Omega d^3} \frac{C - A}{C} \cos \varepsilon \{ 1 - \cos 2(\lambda - \psi) \} \quad (293)$$

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{3GM_L}{2} \frac{C - A}{\Omega d^3} \frac{C - A}{C} \sin \varepsilon \sin 2(\lambda - \psi) \quad (294)$$

$$\dot{\Omega} = 0. \quad (295)$$

La dernière de ces trois relations montre que la vitesse angulaire est constante : cela vient de l'hypothèse de symétrie axiale. Nous avons vu dans le chapitre

57. Avec $\sin^2 a = (1 - \cos 2a)/2$ et $2 \sin a \cos a = \sin 2a$.

sur les marées qu'elle n'est pas strictement réalisée : le bourrelet de marée crée une asymétrie désaxé par rapport à la direction de la Lune ce qui génère un couple de freinage.

Les deux autres équations ne sont pas facilement résolubles. La moyenne temporelle des sinus et des cosinus sur une assez longue période étant nulle, on peut cependant étudier les évolutions moyennes $\bar{\psi}$ et $\bar{\varepsilon}$ des deux angles. On obtient immédiatement :

$$\bar{\psi} = -\frac{3GM_L}{2\Omega d^3} \frac{C-A}{C} \cos \varepsilon \quad (296)$$

$$\bar{\varepsilon} = 0 \quad (297)$$

En moyenne, l'inclinaison de l'axe de la Terre est donc constante, et l'axe décrit un cône à vitesse angulaire $\bar{\psi}$. Cette valeur est donnée par l'observation : l'axe fait un tour, dans le sens rétrograde, en 25800 ans soit⁵⁸ $\bar{\psi} = -50''/\text{an}$. L'observation fournit aussi l'ouverture du cône : $\varepsilon = 23^\circ 26'$. En notant comme à l'éq. (98) $\Gamma_L = \mathcal{M}_L R^3 / \mathcal{M}_T d^3$ et aussi $q = \Omega^2 R^3 / G \mathcal{M}_T \approx 1/289$ le rapport de la force centrifuge à l'équateur sur l'attraction terrestre, il vient :

$$\bar{\psi} = -\frac{3\Gamma_L}{2q} \frac{C-A}{C} \Omega \cos \varepsilon. \quad (298)$$

Pour l'interpréter, il faut aussi ajouter la contribution du Soleil. Avec les mêmes notations qu'à l'éq. (98), il vient :

$$\bar{\psi} = -\frac{3(\Gamma_L + \Gamma_S)}{2q} \frac{C-A}{C} \Omega \cos \varepsilon \quad (299)$$

Cela permet de déterminer la *constante de précession* \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = -\frac{2q}{3(\Gamma_L + \Gamma_S)\Omega \cos \varepsilon} \bar{\psi} \quad (300)$$

$$= \frac{2 \times 2\pi / 25800 \text{ an}}{289 \times 3 \times (5,6 \cdot 10^{-8} + 2,6 \cdot 10^{-8}) 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cos 23^\circ 26'} \quad (301)$$

$$= \frac{1}{308}. \quad (302)$$

valeur proche de la donnée acceptée (1/305,46)⁵⁹. Par ailleurs, $(C-A)$ est déterminée par une méthode gravimétrique. La combinaison de ces deux

58. Le symbole '' désigne la seconde d'arc (un 3600° de degré), le symbole ' la minute d'arc (un 60° de degré).

59. H est actuellement (2015) déterminée avec une précision relative de quelques 10^{-6} . Le coefficient du potentiel $G(C-A)$ est quant à lui déterminé à quelques 10^{-6} . Le produit de l'inertie par G est donc déterminée à quelques 10^{-6} . La constante de gravitation est déterminée à 5×10^{-5}

données est celle qui fournit les moments d'inertie A et C de la Terre et donc son moment moyen⁶⁰ $I = \frac{2A+C}{3}$.

C'est communément cette variation moyenne que l'on nomme *précession*. Les termes périodiques qui s'ajoutent à cette dérive séculaire sont nommés *nutations* (fig. 26). La plus importante d'entre elles se fait avec une période de 18,6 ans due aux variations des paramètres de l'orbite lunaire (rétrogadation des noeuds) à cette période. La précession est connue depuis l'antiquité alors que la nutation de 18,6 ans été découverte par Bradley⁶¹ entre 1727 et 1747. Les deux phénomènes ont été correctement expliqués par D'Alembert en 1749.

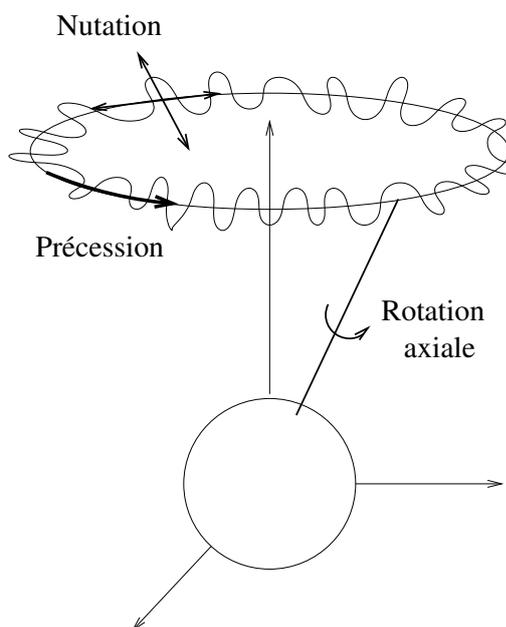


FIGURE 26 – Schéma de la rotation axiale, de la précession et de la nutation de la Terre.

[à continuer : 1. Quelles sont les inerties vraiment mesurées dans le système solaire? 2. autres précessions dans le système solaire : satellites, plan de l'orbite lunaire.]

Mouvement associé du pôle

Déterminons le mouvement du pôle associé à la précession moyenne. Cela revient à exprimer le vecteur rotation dans le repère lié à la Terre. C'est ce que réalise la relation (219). En fait, il est plus simple de l'écrire et de l'interpréter dans le repère $Oxyz$ parce qu'il y est fixe. En effet, si on ne

60. Pour une discussion des valeurs des moments d'inertie terrestres observés, voir Chambat F., and Valette B., 2001, Mean radius, mass and inertia for reference Earth's models. P.E.P.I., Vol 124/3-4, pp 237-253.

61. En observant l'étoile γ du Dragon pendant plusieurs années Bradley escomptait observer la parallaxe annuelle (c'à-d. celle de l'orbite terrestre). En fait, cela lui a permis de découvrir l'aberration et la nutation.

considère que la précession moyenne :

$$\varepsilon = \text{cste} \equiv \varepsilon_0, \quad \Omega = \text{cste} \equiv \Omega_0, \quad (303)$$

$$\psi = \text{cste} \times t \equiv pt, \quad \varphi = \text{cste} \times t \equiv \Omega_0 t. \quad (304)$$

Si bien que la relation (219) s'écrit :

$$\vec{\omega} = p \sin \varepsilon_0 \vec{e}_y + (p \cos \varepsilon_0 + \Omega_0) \vec{e}_z \quad (305)$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est donc constant dans $Oxyz$. Or la Terre tourne à vitesse Ω_0 dans ce repère. Le vecteur rotation décrit donc un cône par rapport à la Terre avec une période diurne. Puisque $p/\Omega_0 = 1 \text{ jour} / 25800 \text{ an} \ll 1$ alors l'angle d'ouverture α_0 de ce cône est petit et égal à $p \sin \varepsilon_0 / \Omega_0 \approx 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$, ce qui correspond à un cercle de 27 cm de rayon à la surface de la Terre. Nettement plus petit que le terme de Chandler, ce mouvement qualifié dans la communauté astronomique de « terme d'Oppolzer », n'a été observé que récemment, à l'aide de gyroscopes laser⁶². [Là ajouter mes considérations sur le rapport des angles. Ainsi que l'équivalent de la figure 25, la taille des cônes est "inversée".].

7.13 Terre réformable : les équations de Liouville

Dans le cas général où le milieu est déformable, on écrit la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{v}'$ avec, par exemple, O le centre de masse de la Terre, \vec{v}_O sa vitesse dans le référentiel de Copernic, $\vec{\omega}$ la rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique, \vec{v}' la vitesse, dite relative, des particules dans le référentiel terrestre. Le moment cinétique par rapport au centre de la Terre se décompose alors en⁶³ :

$$\vec{H} = \mathcal{I}\vec{\omega} + \vec{h} \quad (306)$$

avec \vec{h} le moment cinétique relatif défini par :

$$\vec{h} := \int_V \rho \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}' dV. \quad (307)$$

Dans le référentiel du corps, le théorème du moment cinétique s'exprime alors par ce qu'on nomme *équation de Liouville* :

$$\frac{d(\mathcal{I}\vec{\omega} + \vec{h})}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I}\vec{\omega} + \vec{h}) = \vec{C}. \quad (308)$$

62. Schreiber, K. U., A. Velikoseltsev, M. Rothacher, T. Klügel, G. E. Stedman, and D. L. Wiltshire, 2004, Direct measurement of diurnal polar motion by ring laser gyroscopes, J. Geophys. Res., 109, B06405, doi :10.1029/2003JB002803.

63. Voir la partie sur le moment d'inertie. On choisit ici de prendre le centre de la Terre pour référence de la vitesse, du tenseur d'inertie et du moment cinétique.

ou, écrit autrement :

$$\mathcal{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{C} - \frac{d\mathcal{I}}{dt} \vec{\omega} - \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \vec{\omega}) - \frac{d\vec{h}}{dt} - \vec{\omega} \wedge \vec{h}. \quad (309)$$

Si la rotation s'effectue sur un axe principal d'inertie, alors $\mathcal{I} \vec{\omega}$ est dirigé suivant $\vec{\omega}$ et le troisième terme de droite de la relation précédente est nul ; on dit alors que l'équilibrage dynamique est réalisé⁶⁴, dans le cas contraire on dit en langage familier que l'objet « ne tourne pas rond ». Comme exemple de corps déformable on pourra penser à la Terre ou à une patineuse sur glace en rotation. Par ailleurs, cette dernière relation montre que le vecteur rotation peut être modifié par suite de cinq effets :

- un couple de forces (les frottements sur la glace),
- la variation du tenseur d'inertie (variation de *position* des bras de la patineuse, étendus ou pliés) ;
- la rotation se fait sur une direction différente de l'axe d'inertie ;
- la vitesse de certains points change (*vitesse* des bras de la patineuse) : cela correspond aux deux derniers termes de l'équation.

Pour une Terre déformable, la rotation $\vec{\omega}$ n'est pas définie de manière univoque. Ce qui revient à dire que le référentiel terrestre ne l'est pas. Il y a essentiellement deux façons de le choisir. Le premier est de le lier aux axes principaux d'inertie, le second est de lier au moment cinétique⁶⁵.

Dans le premier cas, le tenseur d'inertie s'écrit alors simplement dans le repère correspondant :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (310)$$

avec A, B, C les moments principaux d'inertie éventuellement variables. Dans ce cas la présence de termes en \vec{h} complique les équations du mouvement.

Un repère terrestre qui convient mieux est celui qui tourne en « moyenne » comme la Terre, ou si l'on veut, celui tel que \vec{v}' soit « minimale », au sens où $\vec{h} \equiv 0$. En fait il est habituellement choisi comme repère terrestre celui, appelé repère de Tisserand, pour lequel le moment relatif de la Terre est nul⁶⁶ : $\vec{h} \equiv 0$. Cela signifie que $\vec{\omega}$ est défini par $\vec{H} = \mathcal{I} \vec{\omega}$ c.-à-d. $\vec{\omega} = \mathcal{I}^{-1} \vec{H}$.

[à continuer]

7.14 Mouvement séculaire du pôle

[à continuer]⁶⁷

64. On parle d'équilibrage statique lorsque l'axe de rotation passe par le centre de masse.

65. Munk & MacDonald, 1960, ch. 3.2, p. 10.

Gross, R.S., 2007, Earth Rotation Variations – Long Period, in Treatise on geophysics, vol. 3. p. 243.

66. Ou plutôt, celui du « manteau » terrestre : $\vec{h}^{\text{manteau+crouete}} \equiv 0$.

67. *True Polar Wander* en anglais. Pour ce paragraphe voir Gross, R.S., 2007, Earth Rotation Variations – Long Period, in Treatise on geophysics, vol. 3. p. 271.

8 Bibliographie

Géodésie et géophysique générales

- BULLEN, K. E., 1975, *The Earth's density*, Chapman and Hall, Londres.
- BURŠA, Milan, PĚČ, Karel, 1988, *Gravity Field and Dynamics of the Earth*, Springer-Verlag, Berlin.
- COULOMB, J., et JOBERT, G. (Ed.), 1973, *Traité de géophysique interne*, t. 1., *Sismologie et Pesanteur*, Masson.
- HERRING, T. (Ed.), 2007, *Treatise on geophysics*, vol. 3, *Geodesy*, Elsevier.
- KAUFMAN, Alex A., RICHARD, Hansen O., 2008, *Principles of the Gravitational Method*, Elsevier.
- LOWRIE, William, 2011, *A Student's Guide to Geophysical Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- MENKE, W., ABBOT, D., 1990, *Geophysical theory*, Columbia University Press.
- STACEY, Frank D., DAVIS, Paul M., 2008, *Physics of the Earth*, 4th Ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Mécanique céleste

- MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F., 1999, *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BRAHIC, André, 2001, *Cinq leçons d'astronomie ; planètes et satellites*, Vuibert, Paris.

Mécanique

Il y a de très nombreux livres de mécanique, citons :

- ARNOLD, V. I., L., DJILALI, E., 1976, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Éditions Mir, Moscou. +
- BENOIT Willy, GRUBER Christian, 1997, *Mécanique générale*, 2ème édition, Presses polytech. univ. romandes, Lausanne.
- BRUHAT, G., 1967, *Mécanique*, Masson, 6ème édition.
- CABANNES, H., 1962, *Cours de mécanique générale*, Dunod. + [Notamment pour la description des référentiels p. 50-55].
- CHAICHIAN, M., MERCHES, I., TUREANU, A., 2012, *Mechanics, an intensive course*, Springer. +
- GOLDSTEIN, H., 1980, *Classical Mechanics*, Addison-wesley. +
- IRODOV, I., 1981, *Principes fondamentaux de la mécanique*, Éditions Mir.
- LANDAU, L., LIFCHITZ, E., 1982, *Mécanique*, Éditions Mir., 4ème édition.
- SPINDEL, P., 2004, *Mécanique*, Vol. 1, *Mécanique newtonienne*, Éd. Sc. GB, 2ème édition.
- STRELKOV, S., 1978, *Mécanique*, Éditions Mir.

Rotation

- BIZOUARD Christian, 2014, Le mouvement du pôle de l'heure au siècle, Modélisation géophysique, Presses Académiques Francophones, Sarrebruck, Allemagne. Disponible légalement gratuitement en pdf.
- CAPITAINE Nicole, SOUCHAY, Jean, 2013, Precession and Nutation of the Earth, in Souchay et al., 2013, Springer.
- LAMBECK, 1980, *The Earth's variable rotation*, Cambridge university press, Cambridge.
- MORITZ & MUELLER, 1987, *Earth Rotation - Theory and Observation*. +
- MUNK & MACDONALD, *The rotation of the Earth*.
- Voir aussi la bibliographie générale.

Marées

- AGNEW, D. C., 2009, Earth Tides, in *Treatise on Geophysics*, vol. 3.
- GREFF-LEFFTZ, M., LEGROS, H., METIVIER, L., 2005, Analytical solutions of Love numbers for a hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, *Cel. Mech. Dyn. Astro*, 93 :113–146
- HURFORD, T. A., GREENBERG, R., 2001, Tidal amplitude for a self-gravitating, compressible sphere, *Lunar and Planetary Science XXXII*.
- LEFEVRE, Fabien, 2000, Modélisation des marées océaniques à l'échelle globale : assimilation de données in situ et altimétriques, Thèse de doctorat d'Océanographie, Toulouse III.
- MARCHUK, G.I, KAGAN, B. A., 1984, *Ocean tides. Mathematical models and numerical experiments.*, Pergamon press, Oxford. [pdf... voir notamment p 19] +
- MARCHUK, G.I, KAGAN, B. A., 1989, *Dynamics of ocean tides.*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- METIVIER_04, Thèse
- MÜLLER, Peter, 2012, *The Equations of Oceanic Motions*, Cambridge Univ. Press.
- PASCOLI, G., 2000, *Astronomie fondamentale*, 3ème éd., Dunod.
- ROULLET, G., Les marées, cours pdf, 2012.
- SOUCHAY, J., MATHIS, S., TOKIEDA, T. (Ed.), 2013, *Tides in Astronomy and Astrophysics*, Springer.
- SIMON, B., LAHAYE-COLLOMB, A., 1997, *La marée*, S.H.O.M., Brest. +
- SIMON, Bernard, 2007, *La marée océanique côtière*, Institut océanographique, Monaco.
- SIMON, B., LEMAÎTRE, A., SOUCHAY, J., 2013, *Oceanic Tides* in Souchay et al., 2013, Springer.
- THUAL, O., Seiches et marées, cours pdf, 2013.
- VANCAMP, M., Thèse pdf, <http://homepage.oma.be/mvc/>, 2014. [marees_hendershott.pdf](#)

http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Thomas_Doodson#Doodson_Numbers
 (seul endroit où j'ai trouvé les phases des sinusoides du potentiel gé-
 nérateur des marées)
<http://www.ifremer.fr/lpo/cours/maree/>
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Marée>
<http://www.shom.fr/le-shom/actualites/les-communiques> +
 Documentaire de 8 min des années 1970 sur les marées dans la Manche :
<https://www.youtube.com/watch?v=ALieMRcml5I>
 Un des premiers MOOC ? (1920) : <https://www.youtube.com/watch?v=Wkj8x24NL9Y>

 Film M2 : <https://www.youtube.com/watch?v=mJorZMT6W3M>
 Partie horizontale : <https://www.youtube.com/watch?v=f5MVRo0v8M8>
 Predictor : <https://www.youtube.com/watch?v=ANObODEFr7M>
<https://www.youtube.com/watch?v=O-N5DuEUap8>
 Animation M2 : <http://www.ifremer.fr/lpo/cours/maree/ondes.html> et
<https://www.youtube.com/watch?v=mJorZMT6W3M>
 K1 : <https://www.youtube.com/watch?v=TVf3IExwDdA>
 Film Legos : https://www.canal-u.tv/video/science_en_cours/les_ondes_de_marees.159

 Sujet concours Centrale : <https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupélec/2004/PC/sujets/phy>

Gravimétrie

LLIBOUTRY, L., 1992, *Sciences géométriques et télédétection*, Masson. [Résumés efficaces sur la mécanique (chap. 6), les harmoniques sphériques et le géoïde (chap. 10)]
 MILLION, C., 1957, *La topographie*, Collection Que sais-je ?, PUF.
 DUPUY, M., DUFOUR, H.-M., 1969, *La géodésie*, Collection Que sais-je ?, PUF.

Histoire des sciences

DEPARIS V., LEGROS H., 2000, *Voyage à l'intérieur de la Terre*, CNRS Éditions, Paris.
 DEPARIS V., LEGROS H., SOUCHAY J., 2013, *Investigations of Tides from the Antiquity to Laplace*. in Souchay et al., 2013, Springer.
 EKMAN Martin, 1993, *A concise history of the theories of tides, precession-nutation and polar motion (from antiquity to 1950)*, *Surveys in Geophysics* 14, 585-617.
 Montucla, *histoire des maths*

Remerciements :

- Certaines figures ont été faites à partir de scripts écrits par Cyril Langlois.