Examen de Géophysique : partie Géomagnétisme

Licence Sciences de la Terre et de l'Environnement de Lyon, 3eme année, 2eme semestre

18 mai 2020

Corrections et barême en bleu. Total : 5 + 30/2 = 20 points

A. Paléomagnétisme

Des mesures d'aimantation on été faites sur des roches en place trouvées à 10°N, 20°E. L'inclinaison trouvée est de $30 \pm 2°$, la déclinaison de 40°. Que pouvez-vous en déduire sur le mouvement de la plaque lithosphérique de cette roche ? On donnera des explications détaillées des hypothèses et des calculs effectués. On ne demande pas de calculer la position du PGV.

- 1,5 point - Avec les hypothèses d'un champ géomagnétique dipolaire et toujours aligné avec l'axe de rotation de la Terre,

- 2 points - on a $\tan I = 2 \tan \vartheta$, où I est l'inclinaison magnétique et ϑ la latitude. La roche a été formée originellement à la latitude

$$\vartheta = \arctan \left(\frac{1}{2} \tan(30°) \right) \simeq 16.1°$$

La plaque est donc descendue de 6° depuis la formation de la roche. De $\tan I = 2 \tan \vartheta$, on tire l'incertitude $\delta(\tan I) = \delta(2 \tan \vartheta)$ on obtient

$$\frac{\delta I}{\cos^2 I} = 2 \frac{\delta \vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

D'où $\delta \vartheta \simeq 1.23°$.

- 1 point - Enfin, la déclinaison mesurée indique qu'*au niveau de l'echantillon*, la plaque a subi une rotation de 40° depuis la mise en place de cette roche.

- 0,5 point - Rien ne peut être dit sur la longitude originale.

B. Jupiter et Europe

Le champ magnétique de Jupiter est quasiment dipolaire, selon un axe proche de l'axe de rotation, d'intensité à sa surface environ 14 fois celle du champ géomagnétique à la surface de la Terre. Le rayon de Jupiter est de 71000 km. Europe est en orbite à 671000 km de Jupiter, dans le plan équatorial de la planète géante. Son diamètre est de 3138 km et sa surface couverte d'un océan (disons de l'eau salée) d'épaisseur 150 km de conductivité électrique proche de 1 $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, recouvert d'une couche de glace (isolante électrique) de plusieurs km. Les roches sous l'océan sont froides et isolantes électriques également.

1) Déterminez l'intensité du champ magnétique de Jupiter au niveau d'Europe.

3 pts L'intensité d'un dipôle magnétique décroît comme $1/r^3$. Le champ magnétique de la Terre à l'équateur est d'environ 0.25 Gauss, soit 0.25 10^{-4} T. Le champ de Jupiter au niveau d'Europe est donc de l'ordre de $14 \times 0.25\ 10^{-4} (71/671)^3 \simeq 4\ 10^{-7}$ T.
NB : même si un facteur $1/r^2$ apparaît dans l'expression de Biot et Savart, le courant $\mathbf{j}$ se referme sur lui-même et son effet s'annule en grande partie. La partie résiduelle du dipôle décroît bien en $1/r^3$.

Au niveau d'Europe, le champ magnétique de Jupiter n'est pas parfaitement constant, notamment à cause de la rotation rapide de la planète géante (en 10 h) et de l'écart angulaire non nul entre l'axe du dipole et l'axe de rotation. On modélise cela en supposant qu'Europe tourne sur elle-même en 10 h dans un champ magnétique uniforme et constant, et qui le reste dans l'océan.

2) Si le champ magnétique est parallèle à l'axe de cette rotation, nous allons voir qu'aucun courant électrique n'est engendré dans l'océan conducteur.

a. Justifiez que l'on peut écrire $\mathbf{E} = -\nabla V$.

3 pts Puisque $\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$ (champ constant), on a rot$\mathbf{E} = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{E} = -\nabla V$.

b. Calculez le rotationnel de $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (plus facile en coordonnées cylindriques).

3 pts $\mathbf{u} = (0, \Omega r, 0)$ en cylindrique avec Ω la vitesse de rotation angulaire d'Europe. $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$, où B_0 est la valeur du champ calculée en 1. D'où $\mathbf{u} \times \mathbf{B} = (B_0 \Omega r, 0, 0)$ et rot$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$.

c. Quelles sont les conditions limites pour le courant électrique $\mathbf{j}$ aux frontières de l'océan.

3 pts Aucun courant électrique ne peut entrer dans les domaines isolants, donc la condition aux limites de l'océan s'écrit $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire à la frontière.

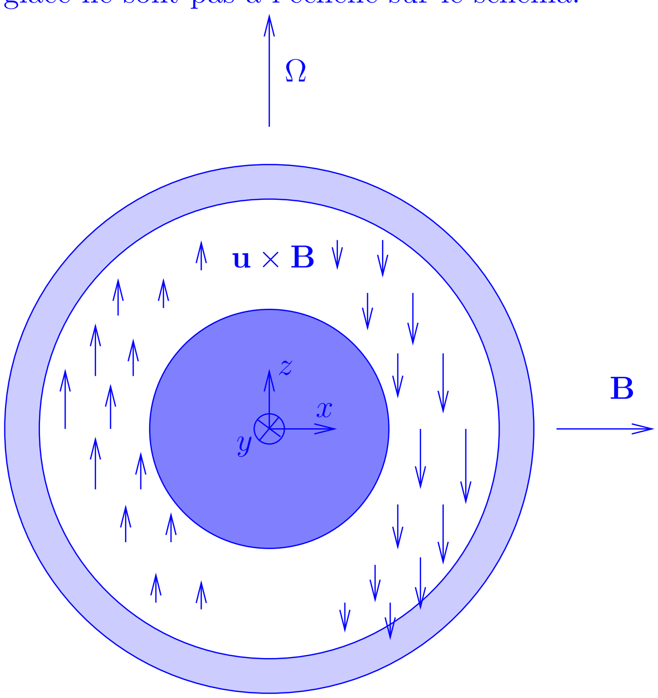
d. Pourquoi doit-on avoir $\mathbf{j} = \mathbf{0}$?

3 pts La loi d'Ohm s'écrit $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$. La condition rot$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ ouvre la possibilité qu'un champ électrique de la forme $\mathbf{E} = -\nabla V$ s'oppose partout à $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. On voit facilement que $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ est le gradient de $B_0 \Omega r^2/2$. Ainsi $V = B_0 \Omega r^2/2$ implique $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. La condition à la limite $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = j_r = 0$ est bien satisfaite. $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ est donc une solution possible. On peut penser que c'est la seule possible (et cela se montre, effectivement).

3) Seule la partie du champ magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation d'Europe, dont l'intensité vaut 1 % du champ de Jupiter, produit des effets d'induction.

a. Considérez une coupe dans le plan de l'axe de rotation d'Europe et du champ magnétique perpendiculaire. Tracez quelques vecteurs du champ $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

3 pts En cartésien (x, y, z), on a $\mathbf{u} = (-\Omega x, \Omega y, 0)$, $\mathbf{B} = (B_1, 0, 0)$, avec $B_1 = 0.01 B_0$. Donc $\mathbf{u} \times \mathbf{B} = (0, 0, -\Omega B_1 x)$, parallèle à l'axe z et d'amplitude proportionnelle à x. L'océan et sa croûte de glace ne sont pas à l'échelle sur le schéma.



b. Calculez le rotationnel de $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (plus facile en cartésien).

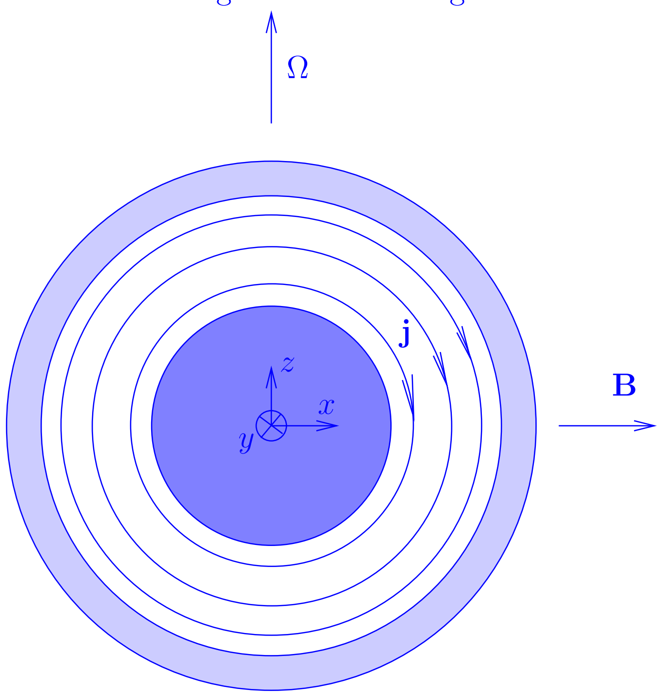
3 pts rot($\mathbf{u} \times \mathbf{B}$) $= (0, -\Omega B_1, 0)$ est uniforme dans la direction y (perpendiculaire à $\mathbf{B}$ et Ω).

c. Est-ce que $\mathbf{E}$ peut s'opposer complètement à $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$?

3 pts Puisque $\mathbf{E}$ est irrotationnel et que le rotationnel de $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ est non nul, il est impossible que leur somme soit nulle.

d. Dessinez la forme générale de la circulation du courant électrique dans l'océan, sans la calculer exactement.

3 pts Le courant suit *grosso modo* la direction donnée par $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, mais la condition de courant normal nul aux frontières engendre des différences de potentiel électriques incurvent les lignes de courant. Celles-ci décrivent globalement une grande boucle dans l'océan.



4) À partir de ce courant électrique, décrivez le champ magnétique induit par l'océan d'Europe. Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique induit, à la surface d'Europe, par les courants électriques dans l'océan ?

3 pts La boucle de courant décrite en 3 engendre un dipôle aligné dans la direction y. Estimons son moment magnétique, c'est à dire le produit du courant électrique par la surface de la boucle. La densité de courant $\mathbf{j}$ est de l'ordre de $\sigma \Omega R B_1$ (où R est le rayon d'Europe), la section de passage du courant environ Rh (où h est l'épaisseur de l'océan). Ce qui donne un courant de l'ordre de $2\ 10^5$ A. L'aire de la boucle de courant est πR^2. Ce qui donne un moment magnétique de

$$M \simeq 2\ 10^{18}\ \mathrm{Am}^2$$

Le champ magnétique engendré est de l'ordre de $2\mu_0 M/(4\pi R^3) \simeq 10^{-7}$ T.