Quelques propriétés des opérateurs différentiels

Soient f, g des champs scalaires, u, v des champs vectoriels, V un volume de bord ∂V de normale unitaire n vers l'extérieur, S une surface orientée par n et de bord ∂S.

Gradient :

$$\mathrm{d}f = \mathrm{grad}f \cdot \, \mathrm{d}M \qquad \int_A^B \mathrm{grad}f \cdot \, \mathrm{d}M = f(B) - f(A)$$

Définitions-propriétés intégrales :

$$\int_V \mathrm{grad}f \; \mathrm{d}V = \int_{\partial V} fn \; \mathrm{d}S$$

$$\int_V \mathrm{div}u \; \mathrm{d}V = \int_{\partial V} u \cdot n \; \mathrm{d}S \qquad \text{(th. de Green-Ostrogradski)}$$

$$\int_V \mathrm{Rot}u \; \mathrm{d}V = \int_{\partial V} n \wedge u \; \mathrm{d}S$$

$$\int_S \mathrm{Rot}u \cdot n \; \mathrm{d}S = \int_{\partial S} u \cdot \, \mathrm{d}l \qquad \text{(th. de Stokes)}$$

Composées :

$$\mathrm{divRot}u = 0 \qquad \mathrm{Rotgrad} = 0 \qquad \Delta f = \mathrm{divgrad}f \qquad \Delta u = \mathrm{graddiv}u - \mathrm{RotRot}u$$

$$\Delta u = (\Delta u_i)e_i \qquad \text{dans la base cartésienne } e_i$$

Distributivité :

$$\mathrm{grad}(fg) = f\mathrm{grad}g + g\mathrm{grad}f \qquad \mathrm{div}(fu) = f\mathrm{div}u + \mathrm{grad}f \cdot u$$

$$\mathrm{Rot}(fu) = f\mathrm{Rot}u + \mathrm{grad}f \wedge u \qquad \mathrm{div}(u \wedge v) = v \cdot \mathrm{Rot}u - u \cdot \mathrm{Rot}v$$

Noyaux sur un domaine :

$$\mathrm{grad}f = 0 \Leftrightarrow f = \mathrm{cste} \qquad \mathrm{div}u = 0 \Leftrightarrow \exists \psi, u = \mathrm{Rot}\psi$$

$$\mathrm{Rot}u = 0 \Leftrightarrow \exists f, u = \mathrm{grad}f$$

$$\forall u, \exists f, \psi \text{ tq} \qquad u = \mathrm{grad}f + \mathrm{Rot}\psi \qquad \text{(th. de Helmoltz)}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes

Coordonnées sphériques. (θ est la colatitude, ϕ la longitude)

L'opérateur gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

L'opérateur divergence s'écrit :

$$\text{div}\vec{B} = \frac{\partial B_r}{\partial r} + 2\frac{B_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta B_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}$$

avec : $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_\phi\vec{e}_\phi$.

L'opérateur rotationnel s'écrit :

$$\vec{\text{Rot}}\vec{A} = \Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi r\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\Big)\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}$$
$$+\Big(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r\sin\theta)\Big)\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} + \Big(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\Big)\frac{\vec{e}_\phi}{r}$$

Coordonnées cylindriques.

L'opérateur gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

L'opérateur divergence s'écrit :

$$\text{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + +\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

avec : $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_z\vec{e}_z$.

L'opérateur rotationnel s'écrit :

$$\vec{\text{Rot}}\vec{A} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\Big)\vec{e}_r + \Big(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\Big)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\Big)\vec{e}_z$$

Elasticité en coordonnées cylindriques

Soient u_r, u_θ, u_z les composantes physiques du vecteur déplacement.

Soient ϵ_{rr}, $\epsilon_{\theta\theta}$, ϵ_{zz}, $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{z\theta}$, ϵ_{rz} les composantes physiques du tenseur des déformations.

Soient σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$, σ_{rz} les composantes physiques du tenseur des contraintes.

Tenseur des déformations :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right), \qquad \epsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right).$$

Tenseur des contraintes (en élasticité isotrope) :

$$\sigma_{rr} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right), \quad \sigma_{zz} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right), \qquad \sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),$$

Divergence du déplacement :

$$\mathrm{div}u = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Equation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + F_z = 0$$

Elasticité en coordonnées sphériques

Soient u_r, u_θ, u_ϕ les composantes physiques du vecteur déplacement.

Soient ϵ_{rr}, $\epsilon_{\theta\theta}$, $\epsilon_{\phi\phi}$, $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{r\phi}$, $\epsilon_{\theta\phi}$ les composantes physiques du tenseur des déformations.

Soient σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\phi}$, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\phi}$, $\sigma_{\theta\phi}$ les composantes physiques du tenseur des contraintes.

Tenseur des déformations :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \operatorname{cotg}\theta\frac{u_\theta}{r},$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \epsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r}\right).$$

$$\epsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \operatorname{cotg}\theta\frac{u_\phi}{r}\right),$$

Tenseur des contraintes (en élasticité isotrope) :

$$\sigma_{rr} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda\,\mathrm{div}u + 2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \operatorname{cotg}\theta\frac{u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right), \qquad \sigma_{r\phi} = \mu\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r}\right).$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \operatorname{cotg}\theta u_\phi\right)\right),$$

Divergence du déplacement :

$$\mathrm{div}u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_\theta\sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

Equation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \operatorname{cotg}\theta\sigma_{r\theta}\right) + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left(3\sigma_{r\theta} + \operatorname{cotg}\theta\left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}\right)\right) + F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\left(3\sigma_{\phi r} + 2\operatorname{cotg}\theta\sigma_{\theta\phi}\right) + F_\phi = 0$$