Viscosité d'un glacier et bandes de Forbes

Petit amusement de mécanique des fluides géophysiques

Frédéric Chambat - ENS Lyon

Octobre-décembre 2008

Introduction

Les bandes de Forbes sont des alternances claires/sombres sur certains glaciers. Elles se forment au niveau des zones de séracs à l'amont du glacier du fait des différences de conditions météorologiques hiver/été : l'explication usuelle veut que les précipitations neigeuses en hiver remplissent les crevasses et que la fonte en été fasse apparaître les poussières. De l'amont vers l'aval du glacier ces bandes sont déformées par l'écoulement, celui-ci étant plus rapide au centre que sur les bords.

Nous modélisons cet écoulement de façon rudimentaire et nous estimons les vitesses de la Mer de Glace à partir d'images satellites. La comparaison permet d'obtenir une viscosité approchée de la glace.

En conclusion une question se pose sur une incompatibilité entre les observations de laboratoire et celles de terrain.

Notations

Considérons le modèle de glacier suivant (cf. figure 1) : une couche de viscosité η, de masse volumique ρ, d'épaisseur constante h, de demi-largeur L, s'écoulant sur une pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale ; soit un repère cartésien $Oxyz$ tel que Ox est dans le sens de la pente et Oy est horizontal. On notera $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ les vecteurs unitaires de base correspondants. Les bandes de Forbes sont visibles sur une demi-largeur $\ell < L$ inférieure à la largeur du glacier.

Résumé de quelques notations et valeurs numériques :

$\rho = 900$ kg/m^3 : masse volumique de la glace

$g = 10$ m/s : pesanteur

$\ell = 300$ m : demi-largeur des bandes de Forbes

$L = 500$ m : demi-largeur du glacier
α : pente du glacier
h : épaisseur du glacier
$\mathbf{v}$: vitesse de l'écoulement
$\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes
x, y, z : coordonnées cartésiennes

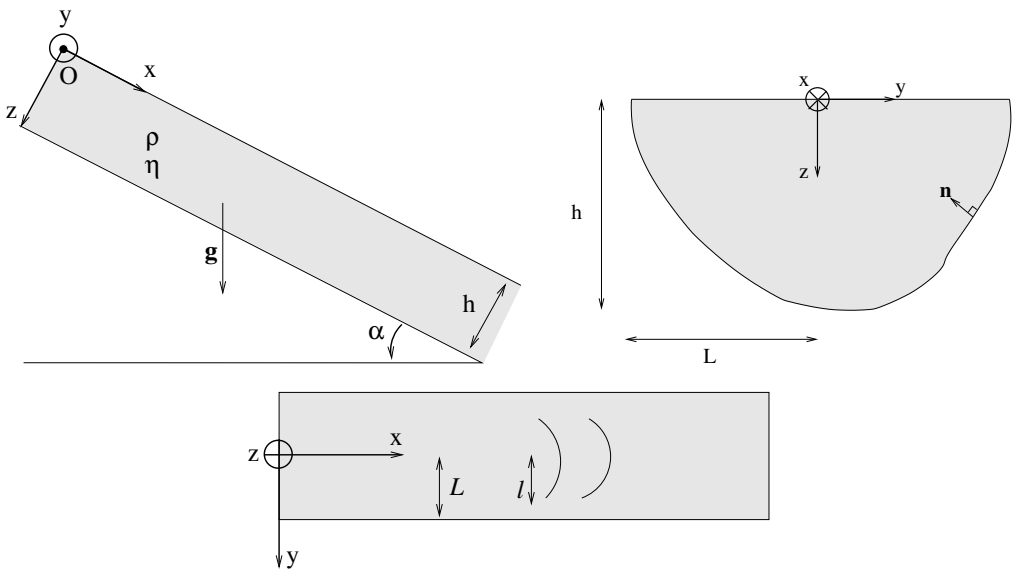

FIG. 1 – Schéma du glacier en coupe longitudinale, transverse et vue du dessus.

1 Rhéologie visqueuse linéaire, résolution 1D

1.1 Hypothèses

Supposons que la rhéologie de la glace est newtonienne c'est-à-dire que les contraintes dépendent linéairement des déformations et que la viscosité est uniforme. Il faut alors résoudre l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad}p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \tag{1}$$

où $\mathbf{v}$ est le champ de vitesse de la glace, p le champ de pression, et $\mathbf{g}$ la gravité supposée uniforme. Pour un écoulement glaciaire de demi-largeur

FIG. 2 – Les bandes de Forbes de la Mer de Glace.

$L = 500\ m$ et de vitesse 100 m/an[1], le nombre de Froude, rapport des forces inertielles à celle de pesanteur, est très petit :

$$F_r = \frac{v^2}{gL} = \frac{(100\ \text{m/an})^2}{10\ \text{m/s}^2 \times 500\ \text{m}} = 2,4.10^{-15}. \tag{2}$$

On peut donc négliger les termes d'accélération et l'équation à résoudre est statique[2] :

$$\boxed{\mathbf{grad}p = \eta\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{g}.} \tag{5}$$

[1]Valeurs mesurées au paragraphe suivant.

[2]En surface la pression est identiquement nulle (eq. 12) si bien que dans la relation suivante on peut égaler les composantes tangentielles des forces visqueuses et de la gravité. L'analyse dimensionnelle de cette relation s'écrit donc $\eta v/L^2 = \rho g \sin\alpha$ et donne déjà une estimation de la viscosité :

$$\eta = \frac{\rho g L^2}{v}\sin\alpha = \frac{\rho v L}{F_r}\sin\alpha = \frac{900\ \text{kg/m}^3 \times 100\ \text{m/an} \times 300\ \text{m}}{4.10^{-15}} \times \frac{1}{10} = 3,5.10^{13}\ \text{Pa.s.} \tag{3}$$

Cela correspond à un nombre de Reynolds, rapport des forces inertielles aux forces visqueuses, lui aussi très petit :

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{F_r}{\sin\alpha} = 2,4.10^{-14}. \tag{4}$$

Supposons que la vitesse est unidirectionnelle : $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ et que la glace est incompressible : div$\mathbf{v} = \partial_x v = 0$, alors $\mathbf{v}$ est de la forme :

$$\mathbf{v} = v(y, z)\ \mathbf{e}_x. \tag{6}$$

Les trois composantes de l'équation d'équilibre deviennent :

$$\begin{aligned} \partial_x p &= \eta(\partial_y^2 v + \partial_z^2 v) + \rho g \sin\alpha, & (7)\\ \partial_y p &= 0, & (8)\\ \partial_z p &= \rho g \cos\alpha. & (9) \end{aligned}$$

Les deux dernières relations montrent que $p = \rho g \cos\alpha\, z + c(x)$. Les contraintes s'écrivent quant à elles :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \tag{10}$$

$$\sigma_{xy} = \eta\partial_y v, \quad \sigma_{xz} = \eta\partial_z v, \quad \sigma_{yz} = 0. \tag{11}$$

Puisqu'en surface :

$$\sigma_{zz} = -p(x, y, z = 0) = 0, \tag{12}$$

la fonction $c(x)$ est identiquement nulle et il reste :

$$p = \rho g \cos\alpha\, z, \tag{13}$$

$$\partial_y^2 v + \partial_z^2 v = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}. \tag{14}$$

1.2 Résolution 1D

Un exercice classique de mécanique considère une couche mince et néglige donc $\partial_y v$ devant $\partial_z v$. On obtient alors un profil parabolique de vitesse en profondeur. Ici au contraire la largeur du glacier n'est pas assez grande pour que v soit latéralement constant et on va donc s'intéresser aux variations de vitesse en fonction de y. Afin de simplifier, au moins dans un premier temps, la résolution du problème, considérons le cas $\partial_z v = 0$. La solution est alors facile à déterminer : c'est une parabole. Plaçons l'origine des y sur l'axe de symétrie de la parabole, la solution s'écrit :

$$v(y) = v(0) - \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}\ y^2. \tag{15}$$

La vitesse diminue donc vers les bords et les bandes de Forbes sont des paraboles de plus en plus déformées au cours de l'écoulement (cf. figure 2). C'est un écoulement analogue à celui de Poiseuille à la différence qu'ici la force d'entraînement est la gravité et non la différence de pression.

1.3 Observations et viscosité de la Mer de Glace

Déterminons les paramètres de l'écoulement à partir des observations des bandes de Forbes de la Mer de Glace (cf. figure 2). On choisit un tronçon de glacier de largeur à peu près constante et de longueur 1 km. Au centre[3] on compte 10 bandes et puisque chacune des bandes est espacée d'un an la vitesse est :

$$v(0) = \frac{1 \text{ km}}{10 \text{ ans}} = 100 \text{ m/an}. \tag{16}$$

Comparons-la à la vitesse mesurée à une distance $\ell = 300$ m du centre. A cette distance pour la même longueur il y a 11 bandes donc

$$v(\ell) = \frac{1 \text{ km}}{11 \text{ ans}} = 91 \text{ m/an}. \tag{17}$$

Les deux points cotés issus de la carte IGN indiquent que la pente est environ $\sin\alpha = 100$ m/1000 m $= 1/10$. La viscosité estimée par cette méthode est donc :

$$\eta = \frac{\rho g \sin\alpha}{2(v(0) - v(\ell))}\,\ell^2 = \frac{900 \times 10 \times 1/10}{2(100-91)}\,300^2 \times \text{an/s} = 1,4.10^{14} \text{ Pa.s}. \tag{18}$$

Les valeurs de la littérature sont souvent proches de 10^{13} Pa.s à pression proche de l'ambiante et température légèrement en dessous de 0°C (glace Ih) mais il faut souligner que la viscosité dépend fortement de la température[4].

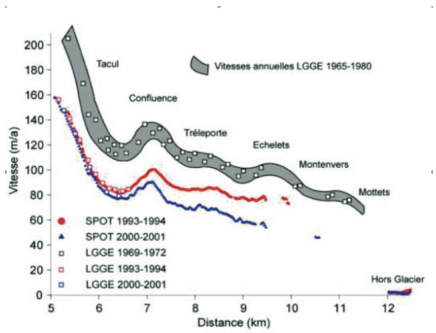

FIG. 3 – Vitesses in situ (LGGE) et satellitaires (SPOT) le long d'un profil longitudinal de la Mer de Glace. Figure issue de (Berthier, 2007).

[3] Abus de langage. Il s'agit exactement du lieu de vitesse maximal qui n'est pas forcément au centre du glacier.

[4] $\eta = 1,4.10^{13}$ Pa.s à -13°C sur `http://fr.wikipedia.org/wiki/Viscosite`. Voir Mével (2003) pour une synthèse plus détaillée.

La figure 3 donne les vitesses mesurées par le laboratoire de glaciologie de Grenoble. Pour comparaison, notre estimation a été faite juste en amont de la « Confluence » (des glaciers du Tacul et de Leschaux).

2 Résolution 2D et champs de contrainte

2.1 Champ de vitesse en 2D

Essayons maintenant de résoudre l'équation (14) sans faire l'hypothèse que la vitesse est indépendante de la profondeur. Afin de continuer à trouver une solution simple, utilisons cependant les observations qui montrent que —en surface et en approximation grossière au moins— le profil de vitesse est quasi parabolique en y. En supposant que cela reste vrai en profondeur la solution est donc de la forme :

$$v(y,z) = a(z)y^2/2 + b(z). \tag{19}$$

La relation (14) donne alors

$$a(z) + a''(z)y^2/2 + b''(z) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}, \tag{20}$$

c'est-à-dire

$$a''(z) = 0 \quad \text{et} \quad b''(z) = -a(z) - \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta} \tag{21}$$

dont les solutions sont

$$a(z) = a_0 + a_1 z, \tag{22}$$

$$b(z) = b_0 + b_1 z - \left(a_0 + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}\right) z^2/2 - a_1 z^3/6. \tag{23}$$

En surface σ_{xz} est identiquement nul, ce qui impose $a'(0) = 0$ et $b'(0) = 0$. Il reste ainsi

$$a(z) = a_0, \tag{24}$$

$$b(z) = b_0 - \left(a_0 + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}\right) z^2/2. \tag{25}$$

Définissons A tel que $a_0 = (A-1)\rho g \sin\alpha/\eta$ et remarquons que $v(0,0) = b_0$. La solution s'écrit donc :

$$\boxed{v(y,z) = v(0,0) - \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}\ \left((1-A)y^2 + Az^2\right).} \tag{26}$$

Elle est somme des paraboles en profondeur et en largeur, avec une proportion A qui reste à déterminer. Puisqu'*a priori* la vitesse diminue vers les bords et vers le fond, lieux de frottements, on observera très probablement $0 \leq A \leq 1$. Le cas $A = 0$ est celui traité en première partie, le cas $A = 1$ est l'exercice classique en mécanique des fluides de l'écoulement invariant latéralement.

Afin de donner une valeur à A à partir de l'observation, commençons par remarquer que si l'on connaît v en trois points, par exemple $v(0,0)$, $v(\ell,0)$, $v(0,h)$, on peut former les deux différences :

$$v(0,0) - v(\ell,0) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}\,(1-A)\ell^2, \tag{27}$$

$$v(0,0) - v(0,h) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}\,Ah^2, \tag{28}$$

et en déduire :

$$A = \frac{1}{1 + \frac{v(0,0)-v(\ell,0)}{v(0,0)-v(0,h)}\left(\frac{h}{\ell}\right)^2}. \tag{29}$$

Reynaud (1985) écrit que «en profondeur les courbes d'égales vitesses peuvent être schématisées par des cercles concentriques avec une vitesse de glissement sur le lit qui atteint les 7 dixièmes de celle de la surface». Les deux éléments ne sont ensemble pas parfaitement compatibles avec notre théorie et avec les deux vitesses mesurées en surface. Pour que les isovitesses soient des cercles il faut en effet que :

$$A = 0,5 \quad \text{donc} \quad \eta = 0,7.10^{14}\ \text{Pa.s.} \tag{30}$$

Pour que la vitesse sur le lit, c'est-à-dire ici à une profondeur $h = 400$ m, soit 70% de celle de la surface il faut que

$$A = \frac{1}{1 + \frac{0,09}{0,3}\left(\frac{400}{300}\right)^2} = 0,65 \qquad \eta = 0,9.10^{14}\ \text{Pa.s.} \tag{31}$$

Dans la suite nous utiliserons la première de ces deux valeurs, qui sont somme toute peu différentes l'une de l'autre relativement aux autres approximations effectuées.

2.2 Contraintes, direction et profondeur des crevasses

Déterminons les propriétés des crevasses à partir de de la forme du tenseur des contraintes. Celui-ci s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{32}$$

$$= -p\mathbf{I} + \eta \begin{pmatrix} 0 & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_y v & 0 & 0 \\ \partial_z v & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$= \begin{pmatrix} -p & \eta\partial_y v & \eta\partial_z v \\ \eta\partial_y v & -p & 0 \\ \eta\partial_z v & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -\rho g \begin{pmatrix} \cos\alpha\ z & \sin\alpha\ (1-A)y & \sin\alpha\ Az \\ \sin\alpha\ (1-A)y & \cos\alpha\ z & 0 \\ \sin\alpha\ Az & 0 & \cos\alpha\ z \end{pmatrix}} \tag{35}$$

avec $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}^T\right)$ le tenseur des taux de déformations.

En surface :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\rho g \sin\alpha\ (1-A)y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

et les vecteurs propres sont $(1, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de valeurs propres $\mp\rho g \sin\alpha\ (1-A)y$, 0 respectivement. Pour $y > 0$, la direction de plus forte tension est donc $(1, -1, 0)$ et cette tension augmente avec y. Les crevasses sont donc plus fréquentes près du bord du glacier, orientées à 45° du bord vers l'amont : ce sont les crevasses marginales (cf fig. 4)[5].

Dans le cas général, c'est-à-dire en profondeur, les trois vecteurs propres sont :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{(1-A)^2y^2 + A^2z^2} \\ (1-A)y \\ Az \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{(1-A)^2y^2 + A^2z^2} \\ (1-A)y \\ Az \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Az \\ -(1-A)y \end{pmatrix}, \tag{37}$$

avec pour valeurs propres :

$$\begin{aligned} &-\rho g \cos\alpha\ z - \rho g \sin\alpha\ \sqrt{(1-A)^2y^2 + A^2z^2} \\ &-\rho g \cos\alpha\ z + \rho g \sin\alpha\ \sqrt{(1-A)^2y^2 + A^2z^2} \\ &-\rho g \cos\alpha\ z. \end{aligned} \tag{38}$$

[5] Dans un milieu en compression comme la Terre, c'est-à-dire lorsque toutes les contraintes principales sont négatives, les failles de glissement apparaissent selon des directions voisines de celles de maximum de contrainte cisaillante, soit à environ 45° des contraintes principales. Ici c'est un processus différent, une des contraintes principales est positive, il y a donc ouverture, celle-ci se fait suivant dans la direction de cette contrainte principale.

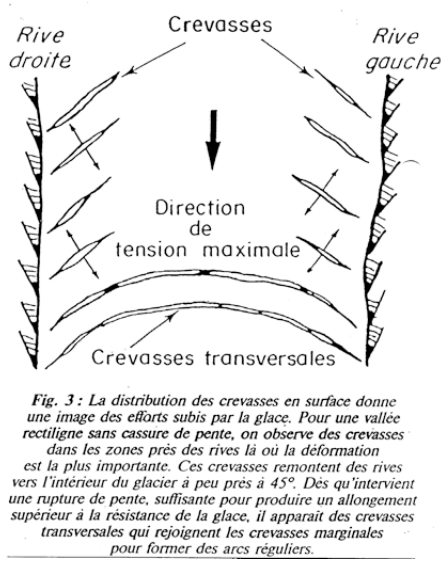

FIG. 4 – Schéma explicatif des crevasses marginales et transversales, tiré de (Reynaud, 1989).

Seule la seconde peut être positive et représenter une tension, les deux autres sont des compressions. Dans la deuxième direction la tension ne subsiste que lorsque

$$\cos\alpha\, z \leq \sin\alpha\, \sqrt{(1-A)^2 y^2 + A^2 z^2}, \tag{39}$$

c'est-à-dire (si $\cos\alpha \geq A$) pour

$$z \leq \frac{\sin\alpha\,(1-A)}{\sqrt{1-(1+A^2)\sin^2\alpha}}|y| \simeq \sin\alpha\,(1-A)|y|. \tag{40}$$

Avec les valeurs précédentes (notamment $A = 1/2$) on trouve une valeur maximale de :

$$z \leq 1/10 \times 1/2 \times 500 \text{ m} = 25 \text{ m}. \tag{41}$$

Ce qui explique que les crevasses dépassent rarement la trentaine de mètres de profondeur ; au delà les contraintes sont toujours compressives.

2.3 Conditions aux limites

En mécanique des fluides visqueux on suppose en général que la vitesse est nulle au contact d'un solide. Cette condition est ici inappropriée puisque le bord et le fond du glacier glissent sur le socle. C'est pourquoi nous avons

choisi de déterminer les constantes d'intégration par l'observation. Cela fixe en retour les contraintes aux limites. Pour les estimer de façon simple supposons que le fond du glacier soit de forme cylindrique. Alors la normale unitaire au bord s'écrit :

$$\mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{y^2+z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{42}$$

et le vecteur traction vaut (cf. eq (35)) :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\rho g}{\sqrt{y^2+z^2}} \begin{pmatrix} \sin\alpha\ (1-A)y^2 + \sin\alpha\ Az^2 \\ \cos\alpha\ yz \\ \cos\alpha\ z^2 \end{pmatrix} \tag{43}$$

c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \rho g \left(-\cos\alpha\ z\ \mathbf{n} + \sin\alpha\ ((1-A)y^2 + Az^2)/h\ \mathbf{e}_x \right) \tag{44}$$

avec ici $h = \sqrt{y^2+z^2}$ le rayon du glacier, c'est-à-dire sa profondeur ou sa demi-largeur. Le premier terme correspond à la contrainte normale σ_n, le second à la contrainte cisaillante σ_τ.

En prenant $A = 1/2$ et $\alpha \simeq 0$ on a alors :

$$\sigma_n = -\rho g z \qquad \sigma_\tau = \rho g h \sin\alpha. \tag{45}$$

La contrainte normale est donc égale au poids de glace au dessus du point considéré, alors que la contrainte cisaillante est constante et dépend du poids maximal projeté sur l'horizontale. A 400 m de profondeur le poids est $\sigma_n = -3600$ kPa $= -36$ bar et la contrainte cisaillante est $\sigma_\tau = 360$ kPa $= 3,6$ bar.

On peut aussi remarquer que la contrainte cisaillante s'écrit en fonction de la vitesse (cf. eq. 26) :

$$\sigma_n = -\rho g z \qquad \sigma_\tau = 2\eta \frac{v(0,0) - v(x,z)}{h}. \tag{46}$$

Dans les simulations utilisées par les glaciologues la vitesse de glissement sur le socle rocheux est supposée être une puissance de la contrainte cisaillante.

3 Rhéologie non linéaire

3.1 Loi rhéologique

Il est bien connu en glaciologie que la rhéologie qui convient n'est pas newtonienne (linéaire avec la déformation) comme supposé dans les parties

précédentes mais est une certaine puissance de la déformation. Cela s'exprime aussi par le fait que la viscosité dépend elle-même de la contrainte ou, ce qui revient au même, de la déformation. La loi la plus utilisée est celle dite *de Glen* (cf. Lliboutry et Reynaud, 1981, p. 209) pour laquelle[6] :

$$\eta = \frac{1}{\mathcal{B}(T)}\ \tau_2^{1-n} = \frac{2^{(1-n)/n}}{\mathcal{B}(T)^{1/n}}\ \dot{\varepsilon}_2^{(1-n)/n} \tag{47}$$

avec :
$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$ le déviateur des contraintes,
$\tau_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\tau_{ij})^2$ le deuxième invariant du déviateur des contraintes,
$\dot{\varepsilon}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij})^2$ le deuxième invariant des taux de déformation,
$\mathcal{B}(T)$ le coefficient de Glen, dépendant de la température.

Autrement dit il faut résoudre l'équation d'équilibre

$$-\mathbf{grad}p + \mathbf{div}\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g} = 0 \tag{48}$$

avec[7] :

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{2}{\mathcal{B}}\right)^{1/n}\ \dot{\varepsilon}_2^{(1-n)/n}\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{49}$$

ou, ce qui revient au même :

$$2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{B}(T)\ \tau_2^{n-1}\ \boldsymbol{\tau} \tag{50}$$

L'exposant qui semble convenir en glaciologie est $n = 3$ (Lliboutry et Reynaud, 1981, p. 209) alors que la cas linéaire correspond à $n = 1$. En supposant que la température varie peu Lliboutry et Reynaud (1981, p. 220) donnent, pour $n = 3$ et pour la mer de Glace, $\mathcal{B} = 8.10^{-24}$ $\mathrm{Pa}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$.

3.2 Variations de la viscosité

Estimons grossièrement quelle peut-être l'amplitude de variation de la viscosité avec les contraintes calculées précédemment (c'-à-d. dans l'hypothèse linéaire même si ce n'est pas cohérent). La relation (35) donne :

$$\tau = -\rho g \begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha\ (1-A)y & \sin\alpha\ Az \\ \sin\alpha\ (1-A)y & 0 & 0 \\ \sin\alpha\ Az & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

[6] Les relations et les valeurs données par Remy, 2006 et Schäfer, 2007, p. 87, comportent des coquilles.

[7] La glace est supposée incompressible, le déviateur du taux de déformations est donc égal au taux de déformations.

c'est-à-dire

$$\tau_2^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = (\rho g \sin\alpha)^2 \ \left((1-A)^2 y^2 + A^2 z^2\right) \tag{52}$$

d'où

$$\eta^{-1} = \mathcal{B} \ \left\{(\rho g \sin\alpha)^2 \ \left((1-A)^2 y^2 + A^2 z^2\right)\right\}^{\frac{n-1}{2}} \tag{53}$$

Cette relation de Glen diverge aux faibles contraintes. On ajoute donc parfois une constante à τ_2, ce qui revient à dire que la loi n'est valable qu'au delà d'une contrainte seuil. Cette dernière est mal connue mais semble inférieure à 50 kPa (Raymond, 2007, p.9), ce qui correspond à une profondeur de 50 m.

Pour $A = 1/2$, $y = 0$, $n = 3$, la valeur de $\mathcal{B}$ donnée au paragraphe précédent, et $z = 50, 100, 200, 300$ puis 400 m on trouve respectivement $\eta = 2,5.10^{14}$, $6,2.10^{13}$, $1,5.10^{13}$, $6,9.10^{12}$ et $3,9.10^{12}$ Pa.s. Les différences avec les calculs qui précèdent s'expliquent par le fait qu'on estime justement ici l'adéquation d'une loi non linéaire avec les résultats donnés par une loi linéaire. On voit néanmoins qu'adopter une loi linéaire revient à se tromper d'un facteur inférieur à 100.

3.3 Résolution exacte en 1D[8]

Cherchons les solutions avec une vitesse de la forme $\mathbf{v} = v(y)\ \mathbf{e}_x$. Dans ce cas $\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}v'(y)$ et les autres composantes du taux de déformations sont nulles. Il vient alors immédiatement $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}|v'(y)|$ et

$$\tau_{xy} = \tau_{xy} = \frac{1}{\mathcal{B}^{1/n}}|v'(y)|^{(1-n)/n} v'(y) \tag{54}$$

Les autres composantes du déviateur de contraintes sont nulles Les trois composantes de l'équation d'équilibre s'écrivent alors :

$$\partial_x p = \partial_y \tau_{xy} + \rho g \sin\alpha, \tag{55}$$

$$\partial_y p = 0, \tag{56}$$

$$\partial_z p = \rho g \cos\alpha. \tag{57}$$

Les deux dernières relations et la condition en surface montrent que $p = \rho g \cos\alpha\, z$. La première relation s'intègre alors aisément. D'après (54) τ_{xy} ne dépend que y et en choisissant l'axe des y de telle sorte que la constante d'intégration soit nulle on obtient :

$$\tau_{xy} = -\rho g \sin\alpha\, y. \tag{58}$$

[8]Inspirée du cours de M2 de Y. Ricard.

Avec (54) la vitesse est alors solution de : $|v'(y)|^{1/n}\text{sign}(v'(y)) = -\mathcal{B}^{1/n}$ $\rho g \sin\alpha\, y$. Le signe de v' est manifestement l'opposé de celui de y, si bien que $v(y)$ est une fonction paire. Pour $y > 0$ cette relation s'écrit aussi :

$$v'(y) = -\mathcal{B}(\rho g \sin\alpha\, y)^n. \tag{59}$$

La solution générale pour tout y est donc :

$$\boxed{v(y) = v(0) - \frac{\mathcal{B}}{n+1}(\rho g \sin\alpha)^n |y|^{n+1}.} \tag{60}$$

Le forme de cette courbe de vitesse est représenté en figure 5 pour quelques valeurs de n. Le taux de déformation vaut donc $\dot{\varepsilon}_{xy} = -\frac{\mathcal{B}}{2}(\rho g \sin\alpha\, y)^n$ pour

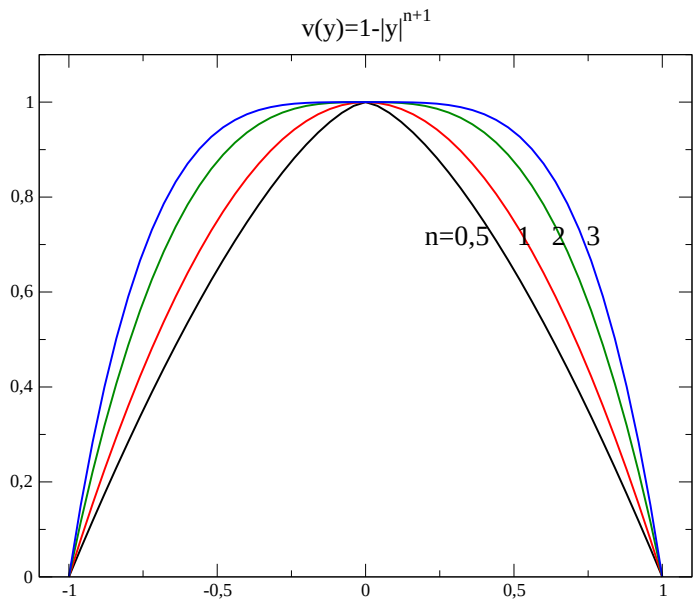

FIG. 5 – Forme de la solution $v(y) = 1 - |y|^{n+1}$ pour plusieurs valeurs de n.

$y > 0$ et la viscosité s'écrit quant à elle

$$\eta(y) = \left|\frac{\tau_{xy}}{2\dot{\varepsilon}_{xy}}\right| = \frac{1}{\mathcal{B}}\ (\rho g \sin\alpha\, |y|)^{1-n}. \tag{61}$$

La vitesse peut être écrite en fonction de la viscosité :

$$v(y) = v(0) - \frac{\rho g \sin\alpha}{(n+1)\eta(y)}\ y^2. \tag{62}$$

Cette relation a la même forme que dans le cas linéaire (eq. 15) : la viscosité η supposée constante dans le cas linéaire devient $\frac{n+1}{2}\eta(y)$ dans le cas général. On peut donc déterminer la viscosité comme au début de ce document à partir de la vitesse en deux points ($y = 0$ et ℓ). Pour $n = 1$ (et $A = 0$) on avait trouvé $\eta = 1,4.10^{14}$ Pa.s. Pour n quelconque la viscosité vaut donc en $y = \ell$:

$$\eta(\ell) = \frac{2}{n+1} \times 1,4.10^{14} \text{ Pa.s.} \tag{63}$$

Pour $n = 1/2$, 2 et 3 cela donne respectivement $\eta = 1,9.10^{14}$ Pa.s, $0,9.10^{14}$ Pa.s, et $0,7.10^{14}$ Pa.s.

La connaissance de la vitesse au centre et en y ne permet donc pas de déterminer la viscosité en y indépendamment de n. Pour contraindre n il faut connaître la vitesse en au moins un troisième point.

Par ailleurs, avec les valeurs indiquées dans les paragraphes précédents on trouve :

$$\mathcal{B} = \frac{(\rho g \sin\alpha\, \ell)^{1-n}}{\eta(\ell)} = \frac{(900 \times 10 \times 1/10 \times 300)^{1-n}}{\frac{2}{n+1} \times 1,4.10^{14}} \overset{n=3}{=} 2.10^{-25} \text{ Pa}^{-3}\text{s}^{-1}. \tag{64}$$

soit 40 fois moins que la valeur donnée par Lliboutry et Reynaud (1981).

4 Quelques remarques

1) J'ai lu quelque part que le profil n'est pas exactement parabolique.

2) L'explication usuelle des bandes de Forbes a été récemment remise en question par Guy et al. (2002) qui propose que leur formation soit due à un mécanisme de rétroaction positive : une augmentation de teneur en poussières abaisse la température et la pression de fusion de la glace et augmente sa vitesse de fusion. Cette fusion provoque une augmentation de la teneur en poussières : c'est une instabilité et il y a création d'une bande grise. Lorsque l'apport de matière dû au mouvement du glacier n'est plus suffisant, la pression baisse à nouveau en dessous du seuil de fusion et le mécanisme repart en sens inverse.

3) Bilan de masse : l'amincissement de la Mer de Glace, était de 1 m/an entre 1979 et 1994, est passé à 3 m/an entre 1994 et 2000 et à plus de 4 m/an entre 2000 et 2003 (cf. site LEGOS et articles associés).

4) Autres exercices à venir : propagation d'une perturbation de topographie, forme d'équilibre d'une calotte polaire.

Mais surtout

Comme le montre une comparaison entre la photo du ciel et la dernière figure, et pour une raison que j'ignore, les bandes de Forbes semblent avoir une forme correspondant à des valeurs de n plus proches de $1/2$ (plus pointues que la parabole) que de 3 (plus plates que la parabole), valeur donnée par les glaciologues... Cette valeur 3 semble provenir d'expériences en laboratoire et je n'ai trouvé nulle part de comparaison réelle avec la forme des bandes de Forbes[9]. On peut suspecter, soit que les mesures de viscosité en labo ne correspondent pas au comportement sur le terrain, ce qui ne serait pas étonnant vu les échelles de temps en jeu, soit que le modèle utilisé ici est très insuffisant, mais il me parait peu probable que la tendance « bandes plus plates/moins plates » puisse s'inverser. Si un glaciologue peut me répondre j'en serais ravi.

5 Bibliographie

Berthier Etienne, 2007, Dynamique et bilan de masse des glaciers de montagne (Alpes, Islande, Himalaya). Contribution de l'imagerie satellitaire, La houille blanche, 2, 116-121. *[Vulgarisation de l'article suivant]*

Berthier Etienne, Arnaud Y., Baratoux D., Vincent C., Remy F., 2004, Recent rapid thinning of the 'Mer de Glace' glacier derived from satellite optical images, Geophys. Res. Let., 31, L17401, doi :10.1029/2004GL020706.

Guy Bernard, Daigneault Martin, Thomas Gérard, 2002, Réflexions sur la formation des bandes de Forbes : l'instabilité de la fusion de la glace sale, C. R. Géoscience, 334, 1061–1070.

Roger LeB. Hooke, 2005, Principles of Glacier Mechanics, Cambridge University Press, 2e ed.

Lliboutry Louis, Louis Reynaud, 1981, Global dynamics of temperate valley glacier, Mer de Glace and past velocities deduced from Forbes bands, Journal of Glaciology, 27, (96) 207-226.

Mével Loïc, 2003, Analyse des structures de la surface d'Europe (satellite de glace de Jupiter) : conséquences dynamiques, rhéologiques et thermiques, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Annexe A. Propriétés mécaniques et thermiques de la glace Ih.

Paterson W. S. B., 1999, Physics of Glaciers, Butterworth-Heinemann Ed., 3e ed.

[9] Certains livres indiquent une compatibilité de $n = 3$ avec le terrain mais il n'y a pas de preuve de cette affirmation.

Rémy Frédérique, Testut Laurent, 2006, Mais comment s'écoule donc un glacier ? Aperçu historique, C. R. Geoscience, 338, 368–385.

Raymond Melanie J., 2007, Estimating basal properties of glaciers and ice streams from surface measurements, Thèse de doctorat, ETH Zurich.

Reynaud Louis, 1989, Crevasses, séracs, moulins et cavités sous glaciaires, Neige et Avalanche, Revue de l'ANENA, n°49, 8-12.

Reynaud Louis, 1985, La Mer de Glace et les glaciers du Mont Blanc, Brochure des Réserves Naturelles de Haute-Savoie.

Schäfer Martina, 2007, Modélisation de l'écoulement des glaciers tempérés, Thèse de doctorat, Univ. J. Fourier Grenoble I. *[Thèse commençant par un résumé de glaciologie]*

Site LGGE : `http://www-lgge.ujf-grenoble.fr/~annel/Documentaire/`

Site LEGOS : `http://www.legos.obs-mip.fr/`

Site PLANET-TERRE : `http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/objets/img_sem/XML/db/planetterre/metadata/LOM-Img276-2009-05-25.xml`