

Examen Élasticité, UE Géophysique 2

27 mai 2008

L3 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Documents autorisés : formulaire donné en cours. 3 h.

— o —

Contraintes dans une topographie

On considère une topographie $h(x)$ à une dimension, de faible pente, de densité $\rho(x, z)$, dans le champ de pesanteur g constant (figure 1). On veut évaluer l'état des contraintes dans cette topographie (sans supposer de loi de comportement comme l'élasticité).

1. Pourquoi peut-on considérer $\sigma_{xz} = 0$ et $\sigma_{zz} = 0$ en surface ?

2. On suppose que les contraintes sont lithostatiques. Résoudre les équations d'équilibre pour σ_{xx} et σ_{zz} .

3. Supposons maintenant qu'au delà d'une certaine distance D (où la topographie est constante) les contraintes sont hydrostatiques. Comment s'écrivent σ_{xx} et σ_{zz} dans cette partie ?

4. En déduire l'expression de σ_{xx} et σ_{zz} sous la topographie. On prendra ρ constant pour simplifier.

5. Quel est le signe de $|\sigma_{zz}| - |\sigma_{xx}|$? Commenter. En tectonique comment appelle-t-on cet état de contrainte ?

6. Calculer la valeur numérique de $|\sigma_{zz}| - |\sigma_{xx}|$, en bar, pour le cas du Tibet.

7. On suppose maintenant qu'en $|x| \geq D$ les contraintes sont les contraintes hydrostatiques déterminées précédemment auxquelles on ajoute un terme négatif $\sigma_{xx} = -\sigma_1$. Quelle est la signification tectonique de ce terme ? Que cela change-t'il sur les résultats précédents ?

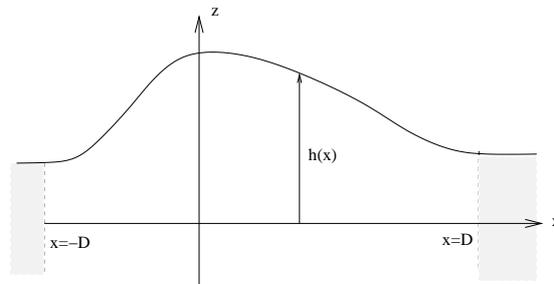


FIG. 1 –

Contraintes élastiques autour d'un tunnel

On considère un massif élastique homogène dans lequel on creuse un tunnel cylindrique infini de rayon R (figure 2). On négligera la pesanteur dans l'équation d'équilibre ; le problème est invariant en θ et z . Le creusement du tunnel conduit à un déplacement et des contraintes élastiques que nous allons quantifier.

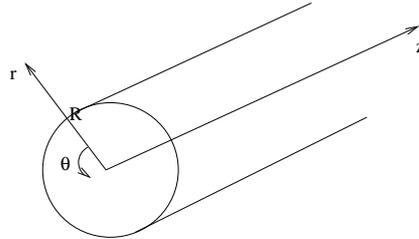


FIG. 2 – Tunnel de rayon R .

a) Pourquoi peut-on écrire que le déplacement est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial ? Donner l'expression du tenseur de déformation en coordonnées cylindriques.

b) Donner dans ce cas l'expression des contraintes élastiques en fonction de u .

c) Dédire de l'équation d'équilibre que $u(r) = C/r$ (la seule condition aux limites qu'on appliquera ici est $u(\infty) \neq \infty$). En déduire les contraintes en fonction de la constante C .

d) On ajoute maintenant à cette contrainte élastique une contrainte initiale σ_0 constante et isotrope ($\sigma_{0rr} = \sigma_{0\theta\theta} = \sigma_{0zz} = \sigma_0$). Appliquer les conditions aux limites sur la somme $\sigma_0 +$ contrainte élastique. En déduire la forme des contraintes en fonction de σ_0 .

e) Imaginons que σ_0 soit une contrainte supposée hydrostatique due au poids des roches. Quel est son signe ? Décrire la forme des contraintes au voisinage du trou ($r \simeq R$).

f) Application numérique. Le trou est à environ 100 m de profondeur et a un rayon de 5 m. Que vaut σ_0 ? Avec $\mu \simeq 3.10^{10}$ Pa, donner une estimation du déplacement à la surface du trou.

g) Représenter le cercle de Mohr en σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ correspondant au régime de contrainte en surface du trou.

h) Il y a fracture quand $\tau = fs + c$ où f est appelé *coefficient de friction*. Indiquer une méthode graphique pour déterminer la contrainte à partir de laquelle une fracture apparaît et l'angle de cette fracture avec la direction \vec{e}_r .

— o —