

# Examen Élasticité, UE Géophysique 2

27 mai 2008

L3 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Documents autorisés : formulaire donné en cours. 3 h.

— o —

## Contraintes dans une topographie

On considère une topographie  $h(x)$  à une dimension, de faible pente, de densité  $\rho(x, z)$ , dans le champ de pesanteur  $g$  constant (figure 1). On veut évaluer l'état des contraintes dans cette topographie (sans supposer de loi de comportement comme l'élasticité).

**1.** Pourquoi peut-on considérer  $\sigma_{xz} = 0$  et  $\sigma_{zz} = 0$  en surface ?

**2.** On suppose que les contraintes sont lithostatiques. Résoudre les équations d'équilibre pour  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$ .

**3.** Supposons maintenant qu'au delà d'une certaine distance  $D$  (où la topographie est constante) les contraintes sont hydrostatiques. Comment s'écrivent  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$  dans cette partie ?

**4.** En déduire l'expression de  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$  sous la topographie. On prendra  $\rho$  constant pour simplifier.

**5.** Quel est le signe de  $|\sigma_{zz}| - |\sigma_{xx}|$  ? Commenter. En tectonique comment appelle-t-on cet état de contrainte ?

**6.** Calculer la valeur numérique de  $|\sigma_{zz}| - |\sigma_{xx}|$ , en bar, pour le cas du Tibet.

**7.** On suppose maintenant qu'en  $|x| \geq D$  les contraintes sont les contraintes hydrostatiques déterminées précédemment auxquelles on ajoute un terme négatif  $\sigma_{xx} = -\sigma_1$ . Quelle est la signification tectonique de ce terme ? Que cela change-t'il sur les résultats précédents ?

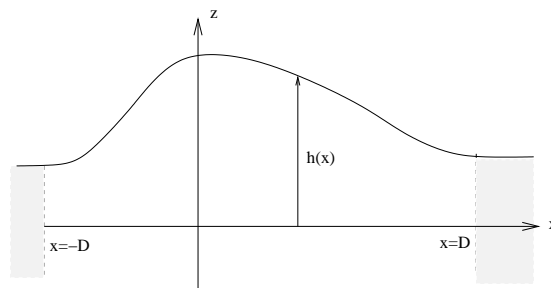


FIG. 1 –

### Contraintes élastiques autour d'un tunnel

On considère un massif élastique homogène dans lequel on creuse un tunnel cylindrique infini de rayon  $R$  (figure 2). On négligera la pesanteur dans l'équation d'équilibre ; le problème est invariant en  $\theta$  et  $z$ . Le creusement du tunnel conduit à un déplacement et des contraintes élastiques que nous allons quantifier.

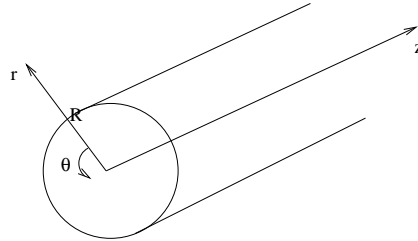


FIG. 2 – Tunnel de rayon  $R$ .

a) Pourquoi peut-on écrire que le déplacement est de la forme  $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$  où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial ? Donner l'expression du tenseur de déformation en coordonnées cylindriques.

b) Donner dans ce cas l'expression des contraintes élastiques en fonction de  $u$ .

c) Dédire de l'équation d'équilibre que  $u(r) = C/r$  (la seule condition aux limites qu'on appliquera ici est  $u(\infty) \neq \infty$ ). En déduire les contraintes en fonction de la constante  $C$ .

d) On ajoute maintenant à cette contrainte élastique une contrainte initiale  $\sigma_0$  constante et isotrope ( $\sigma_{0rr} = \sigma_{0\theta\theta} = \sigma_{0zz} = \sigma_0$ ). Appliquer les conditions aux limites sur la somme  $\sigma_0 +$  contrainte élastique. En déduire la forme des contraintes en fonction de  $\sigma_0$ .

e) Imaginons que  $\sigma_0$  soit une contrainte supposée hydrostatique due au poids des roches. Quel est son signe ? Décrire la forme des contraintes au voisinage du trou ( $r \simeq R$ ).

f) Application numérique. Le trou est à environ 100 m de profondeur et a un rayon de 5 m. Que vaut  $\sigma_0$  ? Avec  $\mu \simeq 3.10^{10}$  Pa, donner une estimation du déplacement à la surface du trou.

g) Représenter le cercle de Mohr en  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  correspondant au régime de contrainte en surface du trou.

h) Il y a fracture quand  $\tau = fs + c$  où  $f$  est appelé *coefficient de friction*. Indiquer une méthode graphique pour déterminer la contrainte à partir de laquelle une fracture apparaît et l'angle de cette fracture avec la direction  $\vec{e}_r$ .

— o —