Imagerie
Correction de l'examen du mercredi 20 janvier 1999

Partie «Imagerie interne de la Terre», Licence des sciences de la Terre, Lyon 1.

— o —

Quelques rappels :

✓ Ce n'est parce qu'on écrit une feuille double que l'on aura plus de points, mieux vaut réfléchir. Certains ont 2/20 avec une feuille double, d'autres 10/10 avec une feuille simple.

✓ Un réponse sensée, argumentée suffit à donner quelques points. Ce n'est pas la peine de recopier le résultat donné dans l'énoncé. Ne préfère-t-on pas quelqu'un qui essaye de réfléchir juste, sans parvenir à une solution (dans l'immédiat...), plutôt que quelqu'un qui connaît la réponse sans être capable de la justifier?

✓ Pourquoi certains réécrivent-ils l'énoncé? En général le correcteur le connaît et ça ne rapporte **aucun** point.

✓ En physique les valeurs des grandeurs ont des unités auxquelles il faut faire attention. Vous savez bien qu'une densité de 1 (l'eau) correspond à une masse volumique de 1000 kg/m^3.

A propos de la figure donnant les anomalies de gravité :

✓ Quand on ne donne pas de valeurs, cela ne veut pas dire qu'elles sont nulles. Dans la figure rien ne disait que les valeurs étaient nulles la où il n'y en avait pas. Vous avez été très nombreux à faire cette confusion.

✓ La figure représentait des anomalies mesurées **en surface** (comment ferait-on pour les mesurer en profondeur?).

1. La gravimétrie a pour but la détermination de la structure, profonde et de surface, de la Terre. La gravité étant sensible à la densité, les mesures des variations de g permettent, de connaître, ou tout au moins de contraindre, celles de la densité.

2. Théorème de Gauss : $-4\pi GM = \int_S \vec{g} \cdot \vec{e}_r \, \mathrm{d}S$ où $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire normale à la sphère et dirigé vers l'extérieur de la sphère. Appliqué à la sphère de rayon r, et par symétrie sphérique ($\vec{g} = g(r)\vec{e}_r$), il s'écrit : $-4\pi GM = 4\pi r^2 g$. Cela donne la célèbre formule $g = -GM/r^2$. Puisque pour une sphère homogène $M = \rho V = 4\pi\rho R^3/3$:

$$\vec{g} = -\frac{4\pi}{3} G\rho \frac{R^3}{r^2}\vec{e}_r. \tag{1}$$

3. La distance entre le centre de la sphère et le point d'observation est $r = (h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$. La gravité dûe à la sphère s'écrit donc :

$$\vec{g} = -\frac{4\pi}{3} G\rho \frac{R^3}{h^2 + x^2}\vec{e}_r. \tag{2}$$

Notons $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire dirigé vers le bas. La composante verticale de $\vec{g}$ est donnée par :

$$g_z = \vec{g} \cdot \vec{e}_z = g\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = g\cos(\mathrm{angle}(\vec{e}_r, \vec{e}_z)) = -gh/r = -gh/(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

C'est-à-dire :

$$g_z = \frac{4\pi}{3} G\rho \frac{R^3}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

Le $\Delta\rho$ provient du fait que l'anomalie est la différence entre la gravité sans la masse et la gravité avec la masse. Tout se passe comme si on avait ajouté un masse de densité $\Delta\rho$. Quand $\Delta\rho > 0$ l'anomalie est bien positive c'est-à-dire qu'il y a un supplément de gravité.

$\boxed{4.}$ La symétrie des mesures semble indiquer une symétrie sphérique, en tout cas au moins de révolution autour du point (X,Y)=(0,0). L'écart à la symétrie provient, soit de l'imperfection de la sphéricité de la masse (concevable, non?), soit d'imprécisions de mesures (idem).

Pour avoir une indication supplémentaire que cela pourrait bien être sphérique il faudrait calculer :

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)} = \left(1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \tag{5}$$

et voir que cette courbe correspond bien à la courbe observée. De façon équivalente on peut en déduire aussi que, si la masse est bien sphérique, alors :

$$h = x\left(\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta g(0)}\right)^{-\frac{2}{3}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Les différentes valeurs observées de $\Delta g(x)$ conduisent à des résultats tous proches de h=300 m ce qui montre que :
- la masse est probablement sphérique,
- sa profondeur est d'environ 300 m.

$\boxed{5.}$ Une fois connu h=300 m on peut en déduire $M = \Delta\rho\, R^3$ à partir des valeurs de $\Delta g(x)$. Cela ne permet pas de déduire $\Delta\rho$ et R séparément puisque on a une observation pour deux inconnues. Physiquement cela provient du fait qu'une petite sphère peu dense peut produire la même attraction d'une grosse peu dense.

$\boxed{6.}$ M se calcule à partir de la relation trouvée en 3. Pour $x = 0$ (par exemple), on trouve :

$$M = \frac{3h^2}{4\pi G}\Delta g(0). \tag{7}$$

A.N. : Avec h=300 m, M=5,8 .10^9 kg.

On ne peut pas déterminer ρ et R mais il y a quand même quelque petites choses que l'on peut dire sur la base d'arguments physiques :

Il faut que $R < h$ (la masse est en-dessous de la surface !), c'est-à-dire $M < \Delta\rho h^3$, donc : $\Delta\rho > M/h^3 \simeq 215\,\mathrm{kg/m^3}$. Pour la densité : $\rho > \rho_c + 215 = 2965$ kg/m^3.

Si la densité est inférieure à $\rho_{sup} = 5000$ kg/m^3 (vrai dans la croûte) alors $\Delta\rho < (\rho_{sup} - \rho_c)$ et $M < (\rho_{sup} - \rho_c)R^3$, c'-à-d. : $R > (M/(\rho_{sup} - \rho_c))^{\frac{1}{3}} \simeq (5,8.10^9/2250)^{\frac{1}{3}} = 137$ m.

$\boxed{7.}$ Ces trajets correspondent à :
- une réflexion sur le sommet de la sphère.
- une réflexion sur la base de la sphère (on pourrait enregistrer d'autres ondes, celles qui se sont réfléchies plusieurs fois sur le haut puis le bas de la sphère, mais leur énergie est probablement trop petite pour qu'on les observe ; en effet à chaque réflexion sur le fond une partie de l'énergie est transmise vers le bas).

$\boxed{8.}$ Le temps d'aller-retour au sommet est $t_1 = 2p/v_p$ où p est la profondeur cherchée.
A.N. : $p = 0,06 * 3000/2 = 90$ m.

$\boxed{9.}$ $h = p + R$ donc $R = h - p = 210$ m.

On en déduit $\Delta\rho = M/R^3 \simeq 627\,\mathrm{kg/m^3}$, c'est-à-dire $\rho \simeq 3377\,\mathrm{kg/m^3}$.

La différence des deux temps est le temps d'aller retour dans la sphère, c'est-à-dire : $t_2 - t_1 = 4R/v'_p$ où v'_p est la vitesse des ondes P dans la masse sphérique.
A.N. : $v'_p = 4R/(t_2 - t_1) = 3500$ m/s.

Texte disponible à `http://www.ens-lyon.fr/~fchambat/html/ens.html`