Analyse dimensionelle

Stéphane Labrosse

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

1. **Ondes P dans un liquide**. Dans un liquide de masse volumique ρ, on rappelle que la relation entre la pression P et le champ de déplacement $\vec{u}$ est

$$P = -K(\nabla \cdot \vec{u}) \tag{1}$$

avec K l'incompressibilité. Quelle est la dimension de K ? Avec des arguments dimensionnels seulement, écrire la vitesse des ondes élastiques dans un liquide (ou ondes sonores).

2. **L'âge de la Terre selon Fourier et Kelvin**. Suivant la théorie de Fourier, Kelvin modélise la Terre comme un demi-espace infini qui se refroidit par diffusion à partir d'une température initiale uniforme T_0, en imposant à sa surface une température nulle. L'âge de la Terre, selon ce modèle, est le temps nécessaire pour que le gradient de température à la surface atteigne sa valeur observée actuellement, qu'on note G. Fourier prend comme valeurs $T_0 = 3870\,°\mathrm{C}, G = 36\,°\mathrm{C\,km^{-1}}, \kappa = 1.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.
   (a) Estimer la profondeur affectée par le refroidissement à la surface et justifier l'hypothèse de demi-espace infini.
   (b) Avec des arguments de dimension, donner la forme de l'évolution du gradient de température à la surface en fonction du temps.

3. **Vitesse de Stokes**. Considérons une sphère de rayon a et masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f et viscosité dynamique η. On suppose que a est suffisamment petit devant l'étendue spatiale du fluide pour considérer ce dernier comme infini. L'ensemble est bien sûr soumis à l'accélération de la gravité, g.
   (a) Par analyse dimensionnelle, en supposant que la force de flottabilité de la sphère est équilibrée par la résistance visqueuse du fluide, exprimer la vitesse de la sphère dans le cas où les densités ρ et ρ_f sont différentes.
   (b) Considérons une anomalie thermique dans le manteau terrestre $\Delta T = 200\,\mathrm{K}$ de rayon $a = 300\,\mathrm{km}$. La viscosité du manteau étant $\eta = 10^{22}\,\mathrm{Pa\,s}$, sa densité moyenne $\rho = 4 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et sa dilatation thermique $\alpha = 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$, estimer la vitesse de montée d'une telle anomalie dans le manteau.

Géomagnétisme

Frédéric Chambat

1. Représenter un champ magnétique dipolaire à la surface et à l'extérieur d'une sphère (le dipôle est placé au centre de la sphère).
2. Est-ce que le champ magnétique terrestre est parfaitement dipolaire, proche d'être dipolaire, très peu dipolaire, pas du tout dipolaire ?
3. Qu'est-ce que la déclinaison magnétique ?

Géophysique numérique en python
Équations de Clairaut, aplatissement de la Terre
Frédéric Chambat

Vous avez droit à vos notes de cours, à vos 5 programmes écrits en TD, à aller sur internet pour chercher la syntaxe des commandes python. Vous n'avez pas le droit d'aller sur internet pour autre chose, notamment d'aller sur un site d'intelligence artificielle, vous n'avez pas le droit de communiquer entre vous ni avec l'extérieur.

En 1743, Alexis-Claude Clairaut a établi les équations que vérifie l'aplatissement [1] $\epsilon(r)$ des couches (surfaces d'égale densité) internes de la Terre en fonction de leur rayon moyen r (distance au centre), de la densité $\rho(r)$, de la vitesse angulaire de rotation de la Terre Ω :

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}r^2} + 6r\gamma \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r} + 6(\gamma - 1)\epsilon = 0 \quad \text{à tout rayon } r, \tag{2}$$

$$R \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r}(R) + 2\epsilon(R) = \frac{5}{2}\frac{\Omega^2 R}{g(R)} \quad \text{en surface } (r = R), \tag{3}$$

$$r\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r}(0) = 0 \quad \text{près du centre } (r = 0), \tag{4}$$

où R est le rayon de la surface de la Terre, $\gamma(r) = \rho(r)/\bar{\rho}(r)$ est le rapport de la densité à la densité moyenne $\bar{\rho}$ dans la sphère de rayon r :

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3}{r^3}\int_0^r \rho(u)u^2 \, \mathrm{d}u. \tag{5}$$

On montre aisément, qu'en posant $\eta = r\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r}$, l'équation (2) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}r} = \frac{\eta}{r} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\left(6(1-\gamma)\epsilon + (1-6\gamma)\eta\right). \tag{7}$$

Aux interfaces, ϵ et η sont continues.

1. Charger le modèle PREM donné dans le fichier `prem.dat`. Mettre le rayon (colonne 1) dans un vecteur et la densité (colonne 2) dans un autre vecteur.
2. Tracer la densité en fonction du rayon dans la Terre.
3. Calculer $\bar{\rho}$ par la méthode des trapèzes, et la tracer. Au centre on prendra $\bar{\rho}(0) = \rho(0)$. A votre avis, d'où vient l'imprécision numérique près du centre ?
4. Calculer et tracer γ.
5. On cherche à résoudre les équations (6)-(7) par la méthode d'Euler. On ne peut pas commencer l'intégration en $r = 0$, pourquoi ?

1. Quantité sans dimension définie ici comme la différence du rayon équatorial au rayon polaire normalisée par le rayon moyen.

6. On commence l'intégration au point immédiatement voisin. Pour ce faire, au centre et au point immédiatement voisin on prend
$$\epsilon = 1, \quad \eta = 0. \tag{8}$$
Résoudre le système d'équations (6)-(7) par la méthode d'Euler jusqu'en surface.
7. Soit ϵ_0, η_0 la solution trouvée. En vertu de (4), la vraie solution est $\epsilon = C\epsilon_0$, $\eta = C\eta_0$, où C est une constante. En remplaçant dans la condition (3), on voit que
$$C = \frac{5}{2}\frac{\Omega^2 R}{g(R)}\frac{1}{\eta_0(R) + 2\epsilon_0(R)}. \tag{9}$$
A partir de vos connaissances, calculer la valeur numérique de Ω. En déduire celle de C.
8. En déduire $\epsilon(r)$ et tracer $1/\epsilon(r)$. Que vaut l'aplatissement ϵ en surface et près du centre ? Pour comparaison, l'aplatissement de la Terre observé est de $\epsilon_{\text{obs}} = 1/298,26$.
9. Vérifier sur un exemple simple ($\rho = $ cste) que votre routine d'intégration donne le bon résultat ($\epsilon = $ cste $\approx 1/231$).
10. Pour trouver une solution à l'imprécision près du centre, on remarque que la densité du modèle PREM dans la graine est de la forme $\rho(r) = \rho(0) + ar^2$ où a est une constante. En déduire la forme théorique de $\bar{\rho}$ en fonction de r puis en fonction de ρ. Dans votre programme, corriger, de cette façon, la valeur de $\bar{\rho}$ dans la graine. Remarquer le changement. Voyez-vous d'autres solutions que celle-ci à l'imprécision numérique près du centre ?