Module de Physique, cours « Champs »,
Examen du 2 juin 2004

Licence de sciences de la Terre, ENS Lyon.

— o —

Tronc commun du module

Examen avec cours, durée conseillée 1 h.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Représenter le champ de vitesse $\vec{v} = (\sin(\pi x)\cos(\pi y), -\cos(\pi x)\sin(\pi y))$ sur $[0,1] \times [0,1]$, ainsi que ses lignes de champ. Cet écoulement pourrait-il être celui d'un fluide incompressible ?

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit le champ de vecteur $\vec{v} = (y/x, y + \ln(xz), z^2 + y/z)$ en coordonnées cartésiennes. Peut-on écrire $\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}} f$ ou $\vec{v} = \vec{\mathrm{Rot}}\vec{\psi}$? Si oui, que valent f et $\vec{\psi}$?

$\boxed{\textbf{3.}}$ Expliquer en quelques lignes ce qu'est une série de Fourier.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique produit par une densité de charge ρ. On rappelle le théorème de Gauss :

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho \,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S, \qquad \forall V. \tag{1}$$

Calculer le champ électrostatique d'un cylindre infini de rayon R uniformément chargé, à distance $r > R$ de l'axe du cylindre. On pourra prendre pour V un cylindre de longueur L et de rayon r.

Partie optionnelle du module

Examen avec cours, durée conseillée 40 min.

Soit $\vec{v}$ un champ de vitesse et $\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ l'accélération particulaire :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v}(\vec{v}). \tag{2}$$

Soit $\vec{e}_i$ la base d'un système de coordonnées orthonormé, on note $\vec{v} = v_i \vec{e}_i$ et on rappelle que le terme d'advection a pour composantes $(\nabla \vec{v}(\vec{v}))_i = (\nabla_j v_i) v_j$.

On se placera dans le système de coordonnées cylindriques pour lequel on a montré que :

$$(\nabla_j v_i) = \begin{pmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r}(\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r}(\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r}\partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Exprimer γ_r, γ_θ, γ_z en fonction de v_r, v_θ, v_z et de leurs dérivées partielles.

2. Simplifier l'écriture de la relation précédente en utilisant :

$$\vec{\mathrm{grad}} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{4}$$

3. Que valent les $\partial_j \vec{e}_i$ pour le système de coordonnées cylindriques ?

4. En déduire l'expression de $(\vec{v} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{v}$ en fonction de v_r, v_θ, v_z et de leurs dérivées partielles, puis que

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{v}. \tag{5}$$

— o —