Module de Physique, cours « Champs », Examen du 2 avril 2003

Magistère de sciences de la Terre, Première année, ENS Lyon.

Examen avec documents. Durée : 2h.

— o —

1. Le champ suivant dérive-t-il d'un potentiel (vecteur ou scalaire) : $\vec{u} = (ye^x, e^x + ze^y, e^y)$? Si oui lequel ?

2. Soit $\vec{r}$ le rayon vecteur du centre O du repère au point $M(x, y, z)$ et r la norme de ce vecteur. Calculer $\vec{\text{grad}}(1/r)$.

3. En utilisant le calcul indiciel développer $\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

4. Soit une onde électromagnétique de champ électrique : $\vec{E} = E(x)e^{i(\omega t - kz)}\vec{e}_y$, avec $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ une base cartésienne orthonormée.

a) Quelle est la direction de propagation de cette onde ?

b) On rappelle l'équation de Maxwell : $\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En déduire la forme de $\vec{B}$.

c) Vérifier les équations de Maxwell : $\text{div}\vec{E} = 0$ et $\text{div}\vec{B} = 0$.

d) On rappelle la quatrième équation de Maxwell : $\text{Rot}\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$.

e) Donner les solutions de cette équation. On pourra poser $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ où $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

5. Soit un volume V, de bord ∂V de normale unitaire $\vec{n}$ vers l'extérieur, soit un champ de vecteur $\vec{u}$ irrotationnel et solénoïdal dans V et tel que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ en tout point de ∂V.

a) Que peut-on déduire du caractère irrotationnel de $\vec{u}$?

b) Montrer que $\text{grad} f \cdot \text{grad} f = \text{div}(f\, \text{grad} f) - f\, \Delta f$

c) En déduire que $\int_V \vec{u}^2 \, \text{d}V = \int_{\partial V} f\, \text{grad} f \cdot \vec{n} \, \text{d}S - \int_V f\, \Delta f \, \text{d}V$, où $\vec{u} = \vec{\text{grad}} f$.

d) Que peut-on déduire sur f du caractère solénoïdal de $\vec{u}$?

e) En déduire que $\int_V \vec{u}^2 \, \text{d}V = 0$, puis que $\vec{u} = 0$ en tout point de V.

— o —