

Module de Physique, cours « Champs »,
Examen du 24 avril 2002

Magistère de sciences de la Terre, Première année, ENS Lyon.

Examen avec documents. Durée : 2h.

— o —

1. Soit \vec{r} le rayon vecteur du centre O du repère au point $M(x, y, z)$ et r la norme de ce vecteur. Soit un champ radial $\vec{u} = ar^n\vec{r}$ pour $r \neq 0$.

a) Pour quelles valeurs de n le champ \vec{u} est-il solénoïdal ?

b) Pour quelles valeurs de n le champ \vec{u} est-il irrotationnel ?

2. Le champ suivant dérive-t-il d'un potentiel (vecteur ou scalaire) :
 $\vec{u} = (x + yz/x^2, -z/x, -y/x)$? Si oui lequel ?

3. En utilisant le calcul indiciel développer :

a) $\text{div}(f\vec{u})$

b) $\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v})$

4. Soient les équations de Maxwell du champ électro-magnétique en dehors des sources : $\text{Rot}\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$, $\text{div}\vec{E} = 0$, $\text{Rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E}$, $\text{div}\vec{B} = 0$.
Montrer que \vec{E} vérifie une équation d'onde. Quelle est la vitesse de l'onde ?

5. On rappelle que le champ de gravité vérifie $\text{div}\vec{g} = -4\pi G\rho$.

a) Montrer le théorème de Gauss, qui stipule que *le flux de la gravité à travers toute surface fermée est égal à $-4\pi G$ multiplié par la masse totale comprise à l'intérieur de la surface.*

b) En déduire le champ de gravité à l'extérieur d'une masse sphérique.

c) Montrer que le taux de décroissance de la gravité quand on s'élève dans l'atmosphère est $2g/r$. Estimer numériquement ce terme.

6. Montrer qu'une fonction harmonique dans V et nulle au bord est nulle dans tout le volume V . On pourra par exemple calculer $\int_V f \Delta f \, dV$. En déduire qu'une fonction harmonique est définie de manière unique par sa valeur au bord.

Annexe ; formules pouvant être utiles :

$$\text{div}\vec{r} = 3, \quad \text{grad}r = \vec{r}/r, \quad \text{Rot}\vec{r} = 0.$$

— o —