

Partiel « Champs »,
14 février 2007

L3 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Examen avec documents. Durée : 2h.

— o —

1. Soit le champ de vitesse $\vec{v} = (y, axy)$ pour $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ et a une constante. Donner l'équation des lignes de champ. Représenter ce champ ainsi que ses lignes de champ. Cet écoulement pourrait-il être celui d'un fluide incompressible?

2. Le champ suivant dérive-t-il d'un potentiel (vecteur ou scalaire) :
 $\vec{u} = (2xy, x^2 - y^2, 0)$? Si oui donner l'expression du potentiel scalaire.

3. A l'aide du calcul indicial montrer que $(\text{Rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \frac{1}{2} \text{grad}(v^2)$ où on a posé $(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})_i = v_j \partial_j v_i$.

4. Contraintes élastiques autour d'un tunnel.

On considère un massif élastique homogène dans lequel on creuse un tunnel cylindrique de rayon R infini (figure 1). On négligera la pesanteur dans l'équation d'équilibre ; le problème est invariant en θ et z . Le creusement du tunnel conduit à un déplacement et des contraintes élastiques que nous allons quantifier.

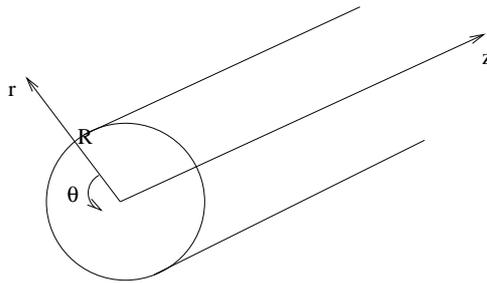


FIG. 1 - Tunnel de rayon R .

a) Pourquoi peut-on écrire que le déplacement est de la forme $\vec{u} = u(r)\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial ? Donner l'expression du tenseur de déformation en coordonnées cylindriques.

b) Donner dans ce cas l'expression des contraintes élastiques en fonction de u .

c) Dédire de l'équation d'équilibre que $u(r) = C/r$ (la seule condition aux limites qu'on appliquera ici est $u(\infty) \neq \infty$). En déduire les contraintes en fonction de la constante C .

d) On ajoute maintenant à cette contrainte élastique une contrainte initiale σ_0 constante et isotrope ($\sigma_{0rr} = \sigma_{0\theta\theta} = \sigma_{0zz} = \sigma_0$). Appliquer les conditions aux limites sur la somme σ_0 + contrainte élastique. En déduire la forme des contraintes en fonction de σ_0 .

e) Imaginons que σ_0 soit une contrainte supposée hydrostatique due au poids des roches. Quel est son signe ? Décrire la forme des contraintes au voisinage du trou ($r \simeq R$).

f) Application numérique. Le trou est à environ 100 m de profondeur et a un rayon de 5 m. Que vaut σ_0 ? Avec $\mu \simeq 3.10^{10}$ Pa, donner une estimation du déplacement à la surface du trou.

g) Représenter le cercle de Mohr en σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ correspondant au régime de contrainte en surface du trou.

h) Il y a fracture quand $\tau = f s + c$ où f est appelé *coefficient de friction*. Indiquer une méthode graphique pour déterminer la contrainte à partir de laquelle une fracture apparaît et l'angle de cette fracture avec la direction \vec{e}_r .

— o —