Partiel « Champs » option
27 mars 2007

L3 de sciences de la Terre, ENS Lyon.

Examen sans documents. Durée : 2h.

— o —

Données : $g_0 = 9,82$ ms^{-2} gravité de la Terre sphérique, $R = 6371$ km son rayon, $G = 6,673.10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} constante de gravitation.

I. Anomalie d'une faille

1. À l'aide du théorème de Gauss calculer, en justifiant le calcul, l'attraction d'un plateau de densité ρ et d'épaisseur h. Rappel, théorème de Gauss : flux de $\vec{g}$=-$4\pi GM$.

2. Justifier que la composante suivant z de l'attraction au dessus du coin d'un demi-plateau est $\pi G\rho h$ (point O sur la figure 1-gauche).

3. En déduire l'expression de cette composante en un point latéral de cote z (point D sur la figure 1-gauche).

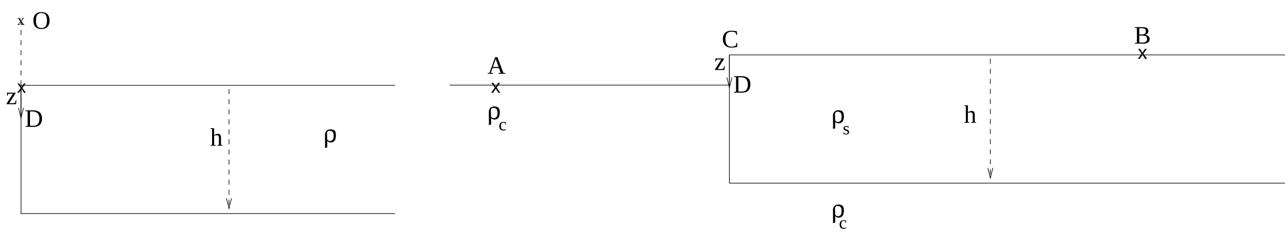

FIG. 1 –

On considère une faille verticale séparant deux milieux de densités ρ_c et ρ_s (figure 1-droite). La référence pour la gravité (anomalie $\Delta g(A) = 0$) est celle de la gravité loin de la faille au dessus du milieu de densité ρ_c (point A). La référence pour les altitudes est celle du point A.

4. Calculer, pour ce modèle, l'anomalie gravimétrique $\Delta g(B) = g(B) - g(A)$ loin de la faille de l'autre côté (point B) ?

5. Quelles sont les anomalies $\Delta g(C)$ et $\Delta g(D)$ au sommet et au pied du miroir de faille ?

6. Calculer numériquement ces anomalies en mGal avec $z = 50$ m, $h = 200$ m, $\rho_c = 2,7$, $\rho_s = 2,6$.

7. Sur le terrain on mesure $\Delta g(B) \simeq -15,0$ mGal. Comment l'interprétez-vous ?

II. Carte globale de gravité

Expliquer en un page maximum les traits principaux de la carte globale de gravité (figure 2).

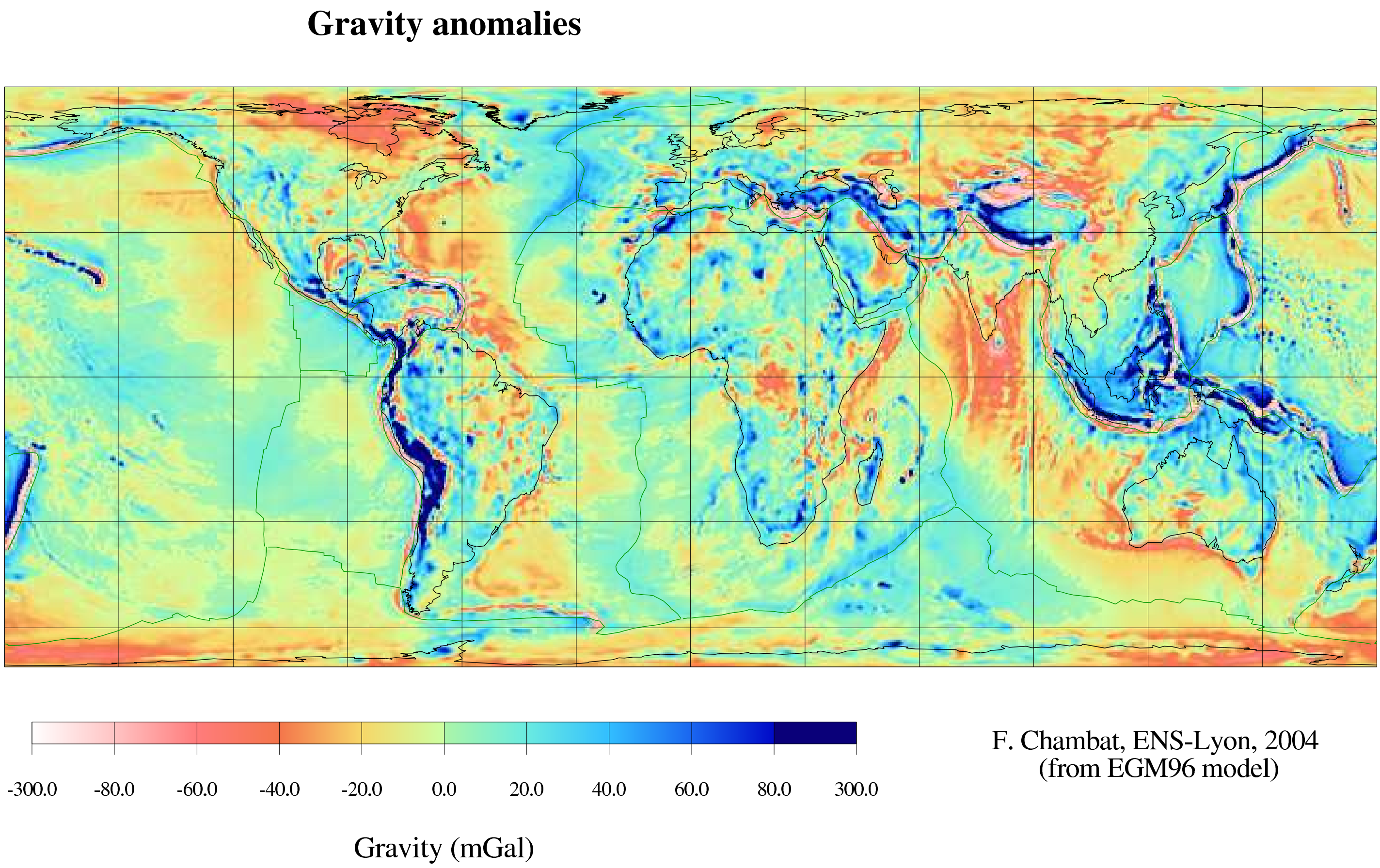

FIG. 2 – *Anomalies de pesanteur à l'air libre*

III. Potentiel vecteur et champ magnétique d'une petite boucle de courant

On rappelle les équations de Maxwell, avec μ et ϵ constants :

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \qquad \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon, \qquad \mathrm{Rot}\vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\epsilon\partial_t\vec{E}, \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 .$$

1. On définit un potentiel vecteur $\vec{A}$ par $\vec{B} = \mathrm{Rot}\vec{A}$. Pourquoi peut-on le faire ?

2. On choisit ce potentiel tel que $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ et on considère maintenant le cas stationnaire. Montrer que $\vec{A}$ vérifie $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$.

3. La solution de $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$ est

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}\,\mathrm{d}V.$$

De quelle autre couple d'équations de la physique peut-on rapprocher ces deux relations ?

On cherche maintenant le potentiel vecteur et le champ magnétique provoqués par un courant électrique dans un fil. Le fil décrit une courbe fermée L, portant une surface infiniment petite S de normale unitaire $\vec{n}$ (cf figure 3).

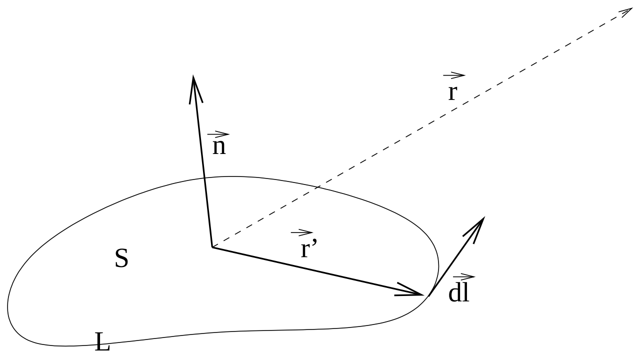

FIG. 3 – *Boucle de courant électrique linéique*

4. On écrit $\vec{j}\ \mathrm{d}V = I\ \vec{\mathrm{d}l}$; expliquer brièvement.

5. Soit f une fonction quelconque, on a la propriété intégrale :

$$\int_L f\ \vec{\mathrm{d}l} = \int_S \vec{n}\wedge \vec{\mathrm{grad}}f\ \mathrm{d}S.$$

On donne aussi (le gradient étant par rapport à la variable $\vec{r'}$) :

$$\vec{\mathrm{grad}}\frac{1}{||\vec{r}-\vec{r'}||} = \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}.$$

En quelle circonstance a-t-on déja rencontré cette dernière relation ?

6. En déduire que, pour un circuit très petit, $\vec{A}$ s'écrit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\vec{M}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

où $\vec{M}$ est le vecteur *moment magnétique* dont on donnera l'expression en fonction de I.

7. Orientons le repère de telle sorte que $\vec{M} = M\vec{e}_z$. Donner l'expression de $\vec{A}$ en coordonnées sphériques. En déduire celle de $\vec{B}$.

8. Ce champ est celui d'un dipôle. Donner ses caractéristiques principales.

Annexe

Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

(θ est la colatitude, ϕ la longitude)

L'opérateur gradient s'écrit :

$$\vec{\mathrm{grad}} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

L'opérateur divergence s'écrit :

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{\partial B_r}{\partial r} + 2\frac{B_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta B_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}$$

avec : $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_\phi\vec{e}_\phi$.

L'opérateur rotationnel s'écrit :

$$\vec{\mathrm{Rot}}\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi r\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}(rA_\theta)\right)\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}$$

$$+\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r\sin\theta)\right)\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\frac{\vec{e}_\phi}{r}$$

— o —