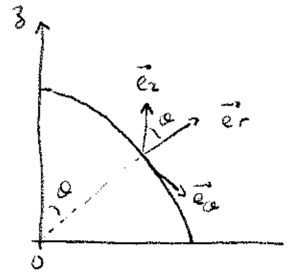
Examen Champs et onde 31 mai 2005 Corrigé

Tronc Commun

## A. Champ magnétique dipolaire

**1**




$\vec{r}\cdot\vec{e}_z = r\cos\theta$

$\vec{r} = r\vec{e}_r$

$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$

donc :

$$\vec{B} = \frac{C}{r^5}\left(3\,r^2\cos\theta\,\vec{e}_r - r^2\left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)\right)$$

$$\vec{B} = \frac{C}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right), \text{ ou } \begin{cases} B_r = \dfrac{2C\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{C\sin\theta}{r^3} \\ B_\lambda = 0 \end{cases}$$

**2** $\vec{B}$ ne dépend pas de $\lambda$ donc il est à sym. de révol. autour de $Oz$.

**3** le long d'une ligne de champ $\vec{dM}\wedge\vec{B} = 0$

or $\vec{dM} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta$ donc

$$\left(dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta\right)\wedge\left(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right) = 0$$

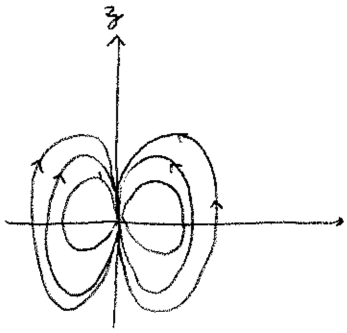
$$dr\sin\theta\,\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta + r\,d\theta\,2\cos\theta\,\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_r = 0 \iff$$

$$dr\sin\theta = r\,d\theta\,2\cos\theta \iff$$

**4**

$$\frac{dr}{r} = 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta \iff \ln r = 2\ln|\sin\theta| + \text{cste}$$

$$\iff r = \text{cste}\,\sin^2\theta$$




à l'éq $\vec{B} = \frac{C}{R^3}\,\vec{e}_\theta$ , si $C<0$,

$\vec{B}$ pointe vers le pôle Nord.

**5** A l'éq $r=R$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ , $\vec{B} = \frac{C}{R^3}\,\vec{e}_\theta$ donc $C = -B_0 R^3$.

$$B = \frac{|C|}{r^3}\left(4\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{1/2} = \frac{|C|}{r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}$$

l'horizontale est donnée par $\vec{e}_\theta$ ; ou $-\vec{e}_\theta$ vers le nord donc :

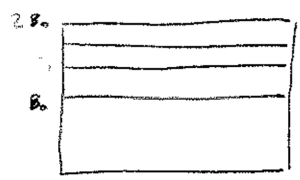
$$\vec{B}\cdot\vec{e}_\theta = -B\cos I \quad \text{donc} \quad \cos I = -\frac{B_\theta}{B}$$

De même $\vec{B}\cdot\vec{e}_r = -B\sin I$ $\quad \sin I = -\frac{B_r}{B}$. donc

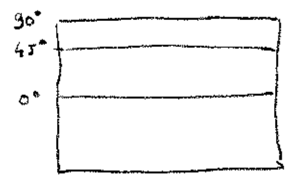
$$\operatorname{tg} I = \frac{B_r}{B_\theta} = 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2\operatorname{cotg}\theta .$$ ("Relation fondamentale du paléomag.")

**6** B augmente de $B_0$ à $2B_0$ de l'éq au pôle.

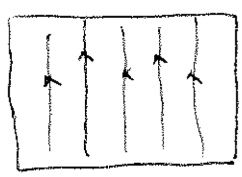
carte d'égales B :




I augmente de 0 à 90° de l'éq au pôle :




Les lignes de champs sont dans des méridiens :



**7** Avec le formulaire en sphérique :

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \left(\partial_r(rB_\theta) - \partial_\theta B_r\right)\frac{\vec{e}_\lambda}{r}$$

$$= \left\{\partial_r\left(\frac{C\sin\theta}{r^2}\right) - \partial_\theta\left(\frac{2C\cos\theta}{r^3}\right)\right\}\frac{\vec{e}_\lambda}{r} = \left(-2\,\frac{C\sin\theta}{r^3} + \frac{2C\sin\theta}{r^3}\right)\frac{\vec{e}_\lambda}{r}$$

$= 0$ donc $\exists V$, $\vec{B} = \operatorname{grad} V$.

Pour avoir $V$ on résoud $\vec{B} = \vec{\text{grad}}\, V$, en sphérique :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2C\cos\theta}{r^3} \Rightarrow V = -C\frac{\cos\theta}{r^2} + f(\theta, \lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{C\sin\theta}{r^3} \Rightarrow \partial_\theta f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda f = 0$$

donc $V = -C\dfrac{\cos\theta}{r^2} + \text{cste}$

$\boxed{8}$ $$\int \vec{B}\cdot\vec{dM} = \int \vec{\text{grad}}\, V\cdot\vec{dM} = [V] = V(R, \pi/3) - V(R, 2\pi/3)$$

$$= -\frac{C}{2R^2} + \frac{-C}{2R^2} = -\frac{C}{R^2} = +B_0 R.$$

ou, à la surface de la Terre, avec $\vec{dM} = R\,d\theta\,\vec{e}_\theta$

$$\int \vec{B}\cdot\vec{dM} = R\int_{2\pi/3}^{\pi/3} B_\theta\, d\theta = \frac{CR}{R^3}\int \sin\theta\, d\theta = \frac{C}{R^2}\Big[-\cos\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi/3} = -\frac{C}{R^2} = B_0 R.$$

## B. Onde électro-magnétique

$\boxed{1}$ $f(x-ct)\vec{e_z} = \vec{E}$ vérifie l'équation d'onde $c^2\Delta\vec{E} = \partial_t^2\vec{E}$,

et même $c^2\partial_x^2\vec{E} = \partial_t^2\vec{E}$.

$\boxed{2}$ Dans le repère $x = ct$, $\vec{E} = \text{cste}$, donc c'est une onde qui se propage à vitesse $c$ dans la direction de $Ox$, et le sens des $x$ croissants. Le mvt de $\vec{E}$ est en $\vec{e_z}$, $\perp$ à $\vec{e_x}$, donc c'est une polarisation transverse.

$\boxed{3}$ $$-\partial_t\vec{B} = \text{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ f(x-ct)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -f'(x-ct)\\ 0\end{pmatrix}$$

càd à un $\vec{B}$ cst près, $B_x = B_z = 0$ et $\partial_t B_y = +f'(x-ct)$

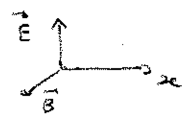
or $\partial_t f(x-ct) = -c\,f'(x-ct)$ donc $\partial_t B_y = -\frac{1}{c}\partial_t f(x-ct)$

donc $B_y = -\frac{1}{c} f(x-ct)$ donc

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} f(x-ct)\vec{e_y} + \cancel{\text{cste}}$$

qu'on enlève par commodité.

Propagation dans le sens des $x$, comme $\vec{E}$, polarisat° transverse et $\perp$ à $\vec{E}$ donc :




$\boxed{4}$ $\text{div}\,\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0$ ok

$\text{div}\,\vec{B} = \qquad = 0$ ok

Reste à vérifier $\text{rot}\,\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{c}\begin{pmatrix}0\\ -f(x-ct)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\frac{1}{c}f'(x-ct)\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -c f'(x-ct)\,\vec{e}_z$ donc les éq$^{ns}$ de Maxwell sont vérifiées si

$$\frac{1}{c} = c\mu\varepsilon \iff c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vitesse de la lumière.}}}{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$\boxed{5}$ $\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\vec{e}_z$

$= E_0 \sin 2\pi\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{t}{\nu}\right)\vec{e}_z$

$= E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{t}{\lambda\nu}\right)\vec{e}_z$ de la forme $f(x-ct)\,\vec{e}_z$.

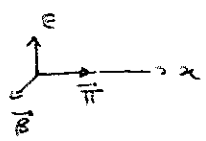
avec $c = \lambda\nu$

$\lambda = 400.10^{-9}\,m$ $\qquad \nu = \frac{3.10^8\,m\,s^{-1}}{4.10^{-7}\,m} = 7{,}5.10^{14}\,s^{-1} = 7{,}5.10^{14}\,Hz$

$\boxed{6}$ $\vec{\Pi} = f(x-ct)\,\vec{e}_z \wedge \frac{-1}{c} f(x-ct)\,\vec{e}_y$

$\vec{\Pi} = \frac{1}{c} f^2(x-ct)\,\vec{e}_x$ direction de propagation : axe des $x$.

polarisation longitudinale.



# Exam ondes et champs 31 mai 2005 Corrigé

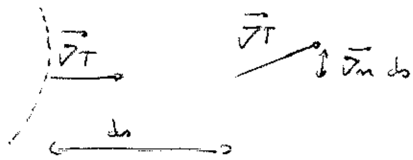
## Partie Optionnelle

### A. Rais sismiques

**1** Au point bas $i = 90°$, $p = \frac{r_b}{v(r_b)}$ égal à $p$ en $R$ : $R \sin i_R / v(R) = p$. Il faut donc résoudre $r_b/(a - b r_b^2) = p$ càd l'éq$^n$ du 2$^{nd}$ degré $p(b r_b^2 - a) + r_b = 0$.

$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4abp^2}}{2pb}$

**2** D'après le cours $d(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) = \overrightarrow{\text{grad}}\, n \, ds$ le long d'un rai, avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, T \parallel$ rai. Or ici $\overrightarrow{\text{grad}}\, v = \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r = -2br\, \vec{e}_r$, dirigé vers le centre, donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$ est dirigé vers l'extérieur.




Donc $d(\overrightarrow{\text{grad}}\, T)$ est vers l'extérieur : les rais sont courbés vers l'extérieur.

**3** Comme pour le cas plan :


$dr = ds \cos i$

$r\,d\theta = ds \sin i$ donc

$r \frac{d\theta}{dr} = \text{tg}\, i$ or $r \sin i / v = p = \text{cte}$ donc $\sin i = \frac{pv}{r}$

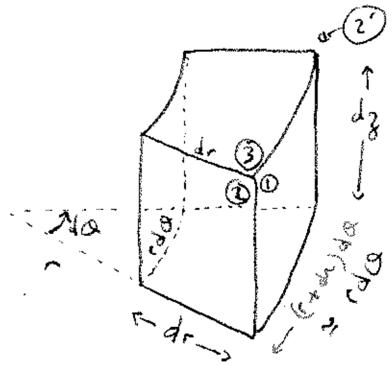
$\cos i = \sqrt{1 - \frac{p^2 v^2}{r^2}}$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{pv/r}{r\sqrt{1 - p^2 v^2/r^2}} = \frac{pv}{r\sqrt{r^2 - p^2 v^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{p(a - br^2)}{r\sqrt{r^2 - p^2(a - br^2)^2}}$$ ; éq$^n$ qu'on intègre pour avoir $\theta(r)$.

## B. Rotationnel en cylindriques.

1




Les côtés ont pour longueurs $dr$, $r\,d\theta$ et $dz$ donc le volume élémentaire vaut $r\,dr\,d\theta\,dz$.

3

Pour un petit volume $\int \vec{rot}\,\vec{u}\,dV = \vec{rot}\,\vec{u}\,dV$.

Il faut écrire $\vec{n} \wedge \vec{u}\,dS$ sur chacune des six faces :

sur la face ① $\vec{n} \wedge \vec{u}\,dS = \vec{e}_r \wedge \vec{u}\; r\,d\theta\,dz$ (en $r = r + dr$)

Décomposons $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{u} = \vec{e}_r \wedge (u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z)$$

$$= u_\theta\,\vec{e}_z - u_z\,\vec{e}_\theta \quad \text{donc}$$

sur la face ① $\vec{n} \wedge \vec{u}\,dS = \left(u_\theta(r+dr)\,\vec{e}_z - u_z(r+dr)\,\vec{e}_\theta\right)(r+dr)\,d\theta\,dz$

de même sur la face ② $= -\vec{e}_\theta \wedge \vec{u}\;dr\,dz$ (en $\theta = \theta$)

$= \left(u_r(\theta)\vec{e}_z - u_z(\theta)\,\vec{e}_r\right) dr\,dz$

sur la face ③ $= \vec{e}_z \wedge \vec{u}\; r\,dr\,d\theta$ en $(z = z + dz)$

$= \left(u_r\,\vec{e}_\theta - u_\theta\,\vec{e}_r\right)(z)\,r\,dr\,d\theta$

Sur les 3 faces opposées c'est pareil en $r = r$, $\theta = \theta + d\theta$, $z = z + dz$, avec des signes − car les $\vec{n}$ sont dans l'autre sens.

En sommant les 6 faces :

$$\int \vec{n} \wedge \vec{u}\, dS = \left( r u_\theta \vec{e}_z (r+dr) - r u_\theta \vec{e}_z (r) \right) d\theta\, dz$$
$$- \left( r u_z \vec{e}_\theta (r+dr) - r u_z \vec{e}_\theta (r) \right) d\theta\, dz$$
$$+ \left( u_z \vec{e}_r (\theta+d\theta) - u_z \vec{e}_r (\theta) \right) dr\, dz$$
$$- \left( u_r \vec{e}_z (\theta+d\theta) - u_r \vec{e}_z (\theta) \right) dr\, dz$$
$$+ \left( r u_\varphi \vec{e}_\theta (z+dz) - r u_\varphi \vec{e}_\theta (z) \right) dr\, d\theta$$
$$- \left( r u_\theta \vec{e}_\varphi (z+dz) - r u_\theta \vec{e}_\varphi (z) \right) dr\, d\theta$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r u_\theta \vec{e}_z - r u_z \vec{e}_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( u_z \vec{e}_r - u_r \vec{e}_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r u_\varphi \vec{e}_\theta - r u_\theta \vec{e}_\varphi \right) \right\} dr\, d\theta\, dz$$

( $\boxed{2}$ or $\partial_r \vec{e}_z = 0 \quad \partial_r \vec{e}_\theta = 0 \quad \partial_\theta \vec{e}_z = 0 \quad \partial_z \vec{e}_r = 0 \quad \partial_z \vec{e}_\theta = 0$

de + $\partial_r \vec{e}_r = 0 \quad \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r \quad \partial_r \vec{e}_z = 0$

$\partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$ donc en divisant par $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$ : )

$$\text{rot}\, \vec{u} = \frac{1}{r} \left\{ \partial_r (r u_\theta) \vec{e}_z - \partial_r (r u_z) \vec{e}_\theta + \partial_\theta u_z \vec{e}_r + u_z \vec{e}_\theta - \partial_\theta u_r \vec{e}_z + \partial_z (r u_\varphi) \vec{e}_\theta - \partial_z (r u_\theta) \vec{e}_\varphi \right\}$$

$$= \left( \frac{1}{r} \partial_\theta u_z - \partial_z u_\theta \right) \vec{e}_r + \left( \partial_z u_r - \partial_r u_z \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \partial_r (r u_\theta) - \partial_\theta u_r \right) \vec{e}_z$$

en simplifiant ce qu'il y a à simplifier.

N. B. on peut être un peu + rapide pour le $\boxed{3}$ en gardant la notation vectorielle un peu + longtemps. En effet :

sur la face ① $\vec{n} \wedge \vec{u}\, dS = r\,\vec{e}_r \wedge \vec{u}\,(r+dr) \cdot d\theta\, dz$

— ② — $= \vec{e}_\theta \wedge \vec{u}\,(\theta + d\theta)\; dr\, dz$

— ③ — $= r\,\vec{e}_z \wedge \vec{u}\,(z+dz)\; dr\, d\theta$

en retranchant les faces opposés, et en divisant par $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ on obtient donc

$$\text{rot}\,\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\vec{e}_r \wedge \vec{u}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\vec{e}_\theta \wedge \vec{u}\right) + \cancel{\frac{1}{r}}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(r\vec{e}_z \wedge \vec{u}\right)$$

Ici, soit on commence par les dérivées, soit par les $\wedge$, le + simple est probablement les $\wedge$ :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{u} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r u_\theta \vec{e}_z - r u_z \vec{e}_\theta\right) + \frac{1}{r}\partial_\theta\left(u_z \vec{e}_r - u_r \vec{e}_z\right)$$
$$+ \partial_z\left(u_r \vec{e}_\theta - u_\theta \vec{e}_r\right)$$

La seule dérivée de vecteur de base est ici $\partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$ donc :

$$\text{rot}\,\vec{u} = \frac{1}{r}\partial_r(r u_\theta)\,\vec{e}_z - \frac{1}{r}\partial_r(r u_z)\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta u_z\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}u_z\,\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta u_r\,\vec{e}_z$$
$$+ \partial_z u_r\,\vec{e}_\theta - \partial_z u_\theta\,\vec{e}_r$$

$$= \left(\frac{1}{r}\partial_\theta u_z - \partial_z u_\theta\right)\vec{e}_r + \left(\partial_z u_r - \partial_r u_z\right)\vec{e}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\partial_r(r u_\theta)\,\vec{e}_z - \partial_\theta u_r\right)\vec{e}_z \qquad \text{ok.}$$