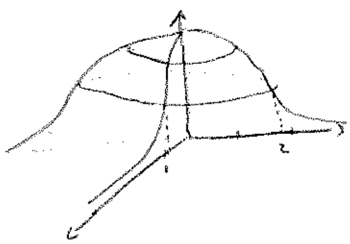
Correction succincte du partiel "champs"

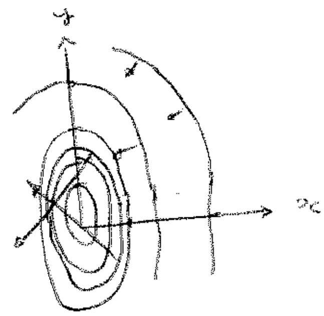
du 6.02.06

$\boxed{1}$ (3 pts)

$f(x,y) = \exp(-r^2)$ avec $r = x^2 + (y/2)^2$

or $\exp(-r^2)$ = gaussienne et $r = \text{cte}$: ellipse donc :





$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = -\begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} \exp -\left(x^2 + (y/2)^2\right)$$

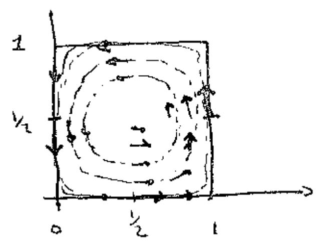
$\boxed{2}$ (7)

$u\,(x=0,\ y) = (0,\ -\sin \pi y)$

$u\,(x,\ y=0) = (\sin \pi x\ ,\ 0)$

$u\,(x=1,\ y) = (0,\ \sin \pi y)$

$u\,(x=\frac{1}{2},\ y) = (\cos \pi y\ ,\ 0)$



Soit $M\binom{x}{y}$ une ligne de champ. $\overrightarrow{dM} \wedge \vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin \pi x \cos \pi y \\ -\cos \pi x \sin \pi y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dz \cos \pi x \sin \pi y \\ dz \sin \pi x \cos \pi y \\ -dx \cos \pi x \sin \pi y - dy \sin \pi x \cos \pi y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de la ligne est $dx \dfrac{\cos \pi x}{\sin \pi x} + dy \dfrac{\cos \pi y}{\sin \pi y} = 0$

ou $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\text{tg}\, \pi y}{\text{tg}\, \pi x}$ à intégrer :

$\operatorname{div} \vec{v} = \partial_x \sin \pi x \cos \pi y - \partial_y \cos \pi x \sin \pi y = 0$

$\int dy \dfrac{\cos \pi y}{\sin \pi y} = -\ln |\sin \pi y|$

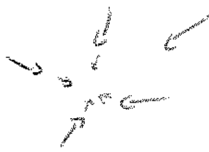
$\int dx \ \ldots \ = -\ln |\sin \pi x|$

donc $\ln |\sin \pi x \ \sin \pi y| = \text{cte}$

$|\sin \pi x \ \sin \pi y| = \text{cte}.$

$$y = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\text{cte}}{\sin \pi x}\right)$$

3. (4)

si $a>0$   si $a<0$

$\vec{u} = a\, r^{n+1}\, \vec{e}_r$; avec les formules en sphérique :

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \partial_r (a r^{n+1}) + \frac{2}{r} a r^{n+1} = a\,(n+3)\, r^n$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \partial_\phi (a r^{n+1}) \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin\theta} - \partial_\theta (a r^{n+1}) \frac{\vec{e}_\phi}{r} = \vec{0}$$

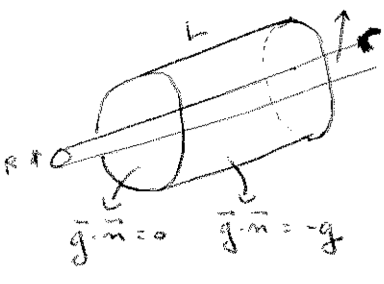
$\vec{u}$ solénoïdal $\iff n = -3 \iff \vec{u} = \frac{a}{r^2}\vec{e}_r$ (gravité etc...)

4. (3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \partial_k (\varepsilon_{ijk}\, u_i v_j) \\
&= \varepsilon_{ijk}\, \partial_k u_i\, v_j + \varepsilon_{ijk}\, u_i\, \partial_k v_j \\
&= v_j\, \varepsilon_{kij}\, \partial_k u_i - u_i\, \varepsilon_{kji}\, \partial_k v_j \\
&= \vec{v} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{u} - \vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$
$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$

5. (4)



$$\int \vec{g}\cdot\vec{n}\, dS = -4\pi G M$$

$$-g \int dS = -4\pi G \rho L \pi R^2$$

$$g\, 2\pi r L = 4\pi G \rho L \pi R^2$$

$$g = \frac{2\pi G \rho R^2}{r}$$

(ne pas oublier de voir que sur les disques qui sont sur les côtés du cylindre $\vec{g}\cdot\vec{n} = 0$)