Partiel « Champs » option

27 mars 2007

Corrigé succinct

— o —

## I. Anomalie d'une faille (8 pts)

**1.** Voir cours et TD.

**2.** Accoler deux demi-plateaux forme un plateau. Les composantes sur $x$ des attractions de ces deux demi-plateaux se compensent (faire un schéma), les composantes sur $z$ sont égales, s'ajoutent et valent $2\pi G\rho h$. La composante cherchée vaut donc $\pi G\rho h$.

**3.** D'après la question précédente. Plusieurs raisonnements possibles dont : attraction vers le bas $2\pi G\rho(h-z)$ et attraction vers le haut $2\pi G\rho z$ donc $g(D) = \pi G\rho(h-2z)$.

**4.** De $A$ à $B$, on monte de $z$ donc il y a un terme $-2g_0 z/R$, on enlève une épaisseur $h-z$ de croûte d'où le terme $-2\pi G\rho_c(h-z)$, on ajoute une épaisseur $h$ de sédiment d'où le terme $2\pi G\rho_s h$. Au final

$$\Delta g(B) = -2g_0 z/R + 2\pi G(\rho_s h - \rho_c(h-z)).$$

**5.** En $C$ c'est pareil avec un demi-plateau :

$$\Delta g(C) = -2g_0 z/R + \pi G(\rho_s h - \rho_c(h-z)).$$

De $A$ à $D$, on enlève une épaisseur $h-z$ de croûte d'où le terme $-\pi G\rho_c(h-z)$, on ajoute une épaisseur $h-z$ de sédiment d'où le terme $2\pi G\rho_s(h-z)$, on ajoute une attraction vers le haut d'épaisseur $z$ de sédiment d'où le terme $-\pi G\rho_s z$. Au final

$$\Delta g(D) = \pi G(\rho_s(h-2z) - \rho_c(h-z)).$$

**6.** On trouve : $\Delta g(B) = -10,5\,\mathrm{mGal}$, $\Delta g(C) = -13,0\,\mathrm{mGal}$, $\Delta g(D) = -3,0\,\mathrm{mGal}$.

**7.** $\Delta g(B)_{mesure} < \Delta g(B)_{topographie}$ donc il y a un déficit de masse. Il compense en partie l'excès de masse dû à cette topographie (isostasie), p. ex. par existence d'une racine crustale. Si l'isostasie était parfaite on aurait $\Delta g(B)_{mesure} = -2g_0 z/R$.

## II. Carte globale de gravité (4 pts)

• Il s'agit d'anomalies à l'air libre donc corrigées de l'altitude. C'est comme si toutes les mesures avaient été faites à même altitude.

• Essentiellement, les anomalies sont peu corrélées avec la topographie. La transition continents-océans, qui est la transition topographique majeure, n'apparaît pas. Il y a donc compensation, interprétée en différences de racines crustales, c'est l'isostasie.

• Certaines topographies apparaissent néanmoins. Citons en premier lieu le Tibet, les Andes, la dorsale Nord-Atlantique. Ne seraient-elles pas compensées ? Pour le voir il faut comparer l'anomalie observée avec l'attraction créée par cette topographie. Par exemple pour le Tibet $2\pi G\rho h = 2\pi.6,67.10^{-11}.2700.5000 = 0,0057$ m/s$^2$ = 570 mGal, valeur très inférieure à celle observée donc le plateau tibétain est bien compensé. Le résidu (valeur observée) provient à la fois de l'écart à l'équilibre isostatique et d'un léger effet de distance (la racine est plus loin que la topographie de surface donc même à masse égale son attraction est moindre).

• Certaines structures ne sont pas à l'équilibre. Par exemple les boucliers scandinave et canadien qui remontent actuellement suite à leur déglaciation et sont en déficit de masse donc anomalie négative. Citons aussi les fosses océaniques en anomalie négative du fait d'un creux topographique.

## III. Potentiel vecteur et champ magnétique d'une petite boucle de courant (10 pts)

**1.** $'\mathrm{div}\vec{B} = 0'$ équivaut à $'\exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \mathrm{Rot}\vec{A}'$.

**2.** En stationnaire $\mu\vec{j} + \mu\epsilon\partial_t\vec{E} = \mu\vec{j} = \mathrm{Rot}\vec{B} = \mathrm{Rot}\mathrm{Rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\mathrm{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A}$ puisque $\mathrm{div}\vec{A} = 0$. c.q.f.d.

**3.** Le potentiel de gravité vérifie $\Delta U = -4\pi G\rho$ et son expression (et donc la solution de cette équation) est :

$$U(\vec{r}) = G\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{||\vec{r} - \vec{r'}||}\ \mathrm{d}V.$$

En changeant $-4\pi G\rho$ en chacune des coordonnées cartésiennes de $-\mu\vec{j}$ la solution de $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{j}$ est directement $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}\ \mathrm{d}V$.

**4.** On suppose que le courant ne circule que le long d'un fil (et non dans un volume). On veut donc passer d'une densité volumique de courant ($j$) à une densité linéique ($I$). Le flux est dans la direction du fil donc on peut écrire $\vec{j} = j\ \vec{\mathrm{d}l}/\ \mathrm{d}l$. Avec $\mathrm{d}V = \mathrm{d}l\ \mathrm{d}S$ il vient donc $\vec{j}\ \mathrm{d}V = j\ \vec{\mathrm{d}l}\ \mathrm{d}S = I\ \vec{\mathrm{d}l}$ ($I$ est *défini* par $I = j\ \mathrm{d}S$).

**5.** On déjà rencontré cette relation en passant du potentiel à la gravité :

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{\mathrm{grad}}U = G\vec{\mathrm{grad}}_{\vec{r}}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{||\vec{r} - \vec{r'}||}\ \mathrm{d}V = G\int_V \rho(\vec{r'})\vec{\mathrm{grad}}_{\vec{r}}\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r'}||}\ \mathrm{d}V$$

$$= G\int_V \rho(\vec{r'})\frac{\vec{r'}-\vec{r}}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}\,\mathrm{d}V$$

qui est l'expression générale de la gravité.

**6.** En utilisant les relations données il vient :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}\,\mathrm{d}V = \frac{\mu}{4\pi}\int_L \frac{I(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}\,\vec{\mathrm{d}l} = \frac{\mu}{4\pi}I\int_S \vec{n}\wedge\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}\,\mathrm{d}S$$

en supposant $I$ constant dans le fil. En faisant $\vec{r'}=0$ il vient bien $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\vec{M}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}$ avec

$$\vec{M} = IS\vec{n}.$$

**7.** Géométriquement : $\vec{e}_z\wedge\vec{r} = \sin\theta r\vec{e}_\phi$. Donc

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{M}{r^2}\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

Il suffit de remplacer dans le formulaire en sphériques pour trouver :

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{M}{r^3}(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$$

C'est bien l'expression du dipôle que nous avions donnée en cours.

**8.** Caractéristiques du dipôle :

- il a la forme précédente !
- il est à symétrie de révolution autour de l'axe $z$.
- il est à symétrie par rapport au plan $Oxy$.
- le champ est horizontal à l'équateur, vertical au pôle.
- plus généralement : tangente(inclinaison)=2 tangente(latitude).
- l'amplitude est en $1/r^3$.
- lignes de champs : voir schéma du cours.

— o —